Feuille 1 : Groupes

Exercice 1. Soit a et b deux entiers relatifs.

1. Montrer que $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.
2. Montrer l'existence de $d \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. En déduire que $d = \text{pgcd}(a, b)$.
3. Montrer l'existence de $m \in \mathbb{N}$ tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. En déduire que $m = \text{ppcm}(a, b)$.

Exercice 2. Soit $G = \{e, x, y, z, t\}$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\star$, dont la table de multiplication est donnée par

$\star$	e	x	y	z	t
e	e	x	y	z	t
x	x	e	t	y	z
y	y	z	e	t	x
z	z	t	x	e	y
t	t	y	z	x	e

La loi $\star$ est-elle commutative ? Est-ce une loi de groupe ?

Exercice 3. Soit G un groupe d'ordre 2. Ecrire sa table de multiplication.

Exercice 4. Quelles sont les structures de groupes possibles sur un ensemble à 3 éléments ? Et à 4 éléments ?

Exercice 5. Soit G un groupe tel que $g^2 = 1$ pour tout $g \in G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 6. Soit G un groupe. Soit $x, y \in G$ tels que $yx = xy^2$ et $xy = yx^2$. Montrer que $x = y = 1$.

Exercice 7.

1. Vérifier que $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont des groupes.
2. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f : (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

   est un morphisme de groupes.
3. En déduire que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sont isomorphes.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est un groupe. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), +)$ en est-il un sous-groupe ?
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & Tr(M) \end{array}$$
où $Tr(M)$ désigne la trace de la matrice M est un morphisme de groupes.
3. Vérifier que $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.
4. Montrer que
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ M & \longmapsto & \det(M) \end{array}$$
est un morphisme de groupes.
L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & Tr(M) \end{array}$$
est-elle un morphisme de groupes ?

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{U}_n$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathcal{U}_n \\ \overline{k} & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi k}{n}} \end{array}$$
est un isomorphisme de groupes.
3. En déduire que $\mathcal{U}_n$ est un groupe cyclique d'ordre n.
4. Montrer que m divise n si et seulement si $\mathcal{U}_m \subseteq \mathcal{U}_n$.

Exercice 10. Décrire les éléments et les sous-groupes des groupes suivants.

1. Le groupe des racines 3-ièmes et 4-ièmes de l'unité.
2. Le groupe des isométries du rectangle.
3. Le groupe des isométries du triangle équilatéral.
4. Le groupe des isométries du carré.
5. Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 11. Quels sont les ordres possibles des sous-groupes du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$?

Exercice 12. Soit G un groupe fini. On suppose qu'il existe $x \in G$ non trivial tel que $x^2 = 1$.

1. Soit $f : G \to G,\ g \mapsto xg$. Montrer que $f \in \mathfrak{S}_G$.
2. Décomposer f en produit de cycle disjoint.
3. En déduire que $|G|$ est pair.
4. Étudier la réciproque.

Exercice 13. Soit $\mathcal{A} = \{x + y\sqrt{2} \,|\, x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
2. Montrer que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\backslash\{0\}$ est un sous groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
3. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{A}^* \to \mathbb{Q}_+^*,\ x + y\sqrt{2} \mapsto x^2 - 2y^2$ est un morphisme de groupes.

Exercice 14. Soit G un groupe. Si H et K sont des sous-ensembles de G, on note $HK = \{hk \,|\, h \in H,\ k \in K\}$. On suppose que G est abélien et que H et K sont des sous-groupes de G.

1. Montrer que HK est un sous-groupe de G.
2. Montrer que l'application
$$\varphi : H \times K \to HK,\ (h,k) \mapsto hk$$
est un morphisme de groupes. Quel est son image ? Son noyau ?

Exercice 15. Soit G un groupe fini, et H, K deux sous-groupes de G d'ordre premier entre eux. Montrer que $H \cap K = \{1\}$.

Exercice 16. Montrer que les groupes $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.