Feuille d'exercices n°3

Polynômes.

Exercice 1. On se place dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$.

1. Déterminer tous les polynômes de degré inférieur où égal à 3 et, parmi eux, lesquels sont irréductibles.
2. Existe-t-il un polynôme de degré 4 sans racine et non irréductible ?

Exercice 2. Soit A et B deux polynômes de degré $\geqslant 1$ premiers entre eux. Montrer qu'il existe un unique couple (U, V) de polynômes tels que $AU + BV = 1$, $\deg U < \deg B$ et $\deg V < \deg A$.

Exercice 3. Soit L un corps commutatif et K un sous-corps de L. Démontrer que pour tout $A, B \in K[X]$, $PGCD(A, B)$ est le même dans $K[X]$ et dans $L[X]$.

Exercice 4. m et n étant deux entiers naturels, calculer le PGCD de $X^m - 1$ et $X^n - 1$ dans $K[X]$.

Exercice 5 (Résultant). Soit $A = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ deux polynômes non constants de $K[X]$ de degrés respectifs m et n. On note pour tout entier naturel d, $E_d = K_{d-1}[X] = \{P \in K[X] \ , \ \deg P < d\}$.
On définit l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} E_n \times E_m & \longrightarrow & E_{m+n} \\ (P, Q) & \longmapsto & AP + BQ \end{array}$$

On considère les vecteurs colonnes à $m + n$ lignes suivants :

$$C_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, C_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

et aussi

$$D_0 = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, D_{m-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Soit R_{AB} le déterminant de la matrice dont les colonnes sont $C_0 \ldots C_{n-1} \ldots D_0 \ldots D_{m-1}$.

1. Quelles sont les dimensions des espaces vectoriels E_{m+n} et $E_n \times E_m$? En donner des bases.
2. Vérifier que f est linéaire.
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) A et B sont premiers entre eux, (b) f est bijective, (c) $R_{AB} \neq 0$.

Exercice 6. *(On peut le voir comme une application de l'exercice précédent).* On se place dans $\mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer le PGCD de $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + a'X + b'$. Donner une condition nécessaire et suffisante polynômiale sur les coefficients pour que P et Q aient une racine commune.
2. Mêmes question avec $P = X^2 + aX + b$ et $Q = X^3 + bX + q$.

Exercice 7 (Polynôme interpolateur de Lagrange). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$, $n + 1$ réels distincts deux à deux. On considère l'application φ de $K_n[X]$ dans K^{n+1} définie par $\varphi(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$.

1. Montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. Déterminer l'image par φ^{-1} de la base canonique de K^{n+1}. On notera $L_i = \varphi^{-1}(e_{i+1})$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de K^{n+1}. Justifier pourquoi $(L_i)_{i=0,\ldots,n}$ est une base de $K_n[X]$.
3. En déduire que pour tout $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in K^{n+1}$, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $P(a_i) = \alpha_i$. Expliciter ce polynôme dans la base $(L_i)_{i=0,\ldots,n}$.
4. *Application* : déterminer l'unique polynôme de degré inférieur où égal à 2 de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(-1) = 1$, $P(1) = -5$ et $P(2) = \sqrt{2}$.