Fonctions d'une variable réelle : Exercices

7.1 Exercice. (NOUVEAU) *Propriété de la valeur intermédiaire.* Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Démontrer que les deux énoncés suivants sont équivalents :

1. pour tout couple de points $(a, b) \in I^2$ et tout $x \in \mathbb{R}$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in \mathbb{R}$ compris entre a et b tel que $f(c) = x$;
2. pour tout intervalle $J \subset I$, l'ensemble $f(J) \subset \mathbb{R}$ est un intervalle.

7.3 Exercice. (*cf.* [Monier Analyse, exercices 1, 4.4.9]). Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $\phi(x) = \sup\{f(t);\ t \in [0, x]\}$. Démontrer que ϕ est croissante et continue.

7.9 Exercice. (Inégalité de Young)

1. Soit $f : [0, c] \to [0, d]$ une bijection strictement croissante. Soient $a \in [0, c]$ et $b \in [0, d]$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt + \int_0^b f^{-1}(t)\,dt \geqslant ab$ avec égalité si et seulement si $f(a) = b$.
2. En déduire que, pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on a $ab \leqslant \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.
3. En déduire une démonstration de l'inégalité de Hölder : Pour des éléments $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q$.
4. Soit $f : [0, a] \to [0, b]$ une bijection strictement décroissante. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^b f^{-1}(t)\,dt$·

7.10 Exercice. (Théorème de prolongement de la dérivée). Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue.

1. Soit $c \in I$. On suppose que f est dérivable sur $]a, c[$ (*resp.* sur $]c, b[$, sur $]a, c[\cup]c, b[$) et que f' admet en c une limite à gauche (*resp.* une limite à droite, une limite) ℓ. Démontrer que f admet en a la dérivée à gauche (*resp.* dérivée à droite, dérivée) ℓ pour une généralisation).
2. On suppose que f est convexe et dérivable. Démontrer que f est de classe C^1. (Voir aussi 7.18.)

7.13 Exercice. (*cf.* [Monier Analyse, exercices 1, 5.2.1]).

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé et à racines simples sur $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il en est de même pour P'.
2. Soit P un polynôme réel scindé. Démontrer que P' est scindé.

7.15 Exercice. Le but de l'exercice qui suit est de démontrer le *Théorème de relèvement* (on dit aussi « lemme du relèvement ») :

Théorème de relèvement. *Soit $u : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ une application continue. Alors il existe une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que $u = \exp \circ f$.*

Une telle application f s'appelle un *relèvement* continu de u.

1. Démontrer que si f et g sont deux relèvements continus de u, alors $f - g$ est constante égale à $2ik\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.
2. Quelques cas simples :
   a) Démontrer que si f est un relèvement continu de u et g est un relèvement continu de v alors la fonction $f + g$ est un relèvement continu de uv.
   b) On écrit $u(t) = x(t) + iy(t)$ avec $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$. Démontrer que si pour tout $t \in [0,1]$ on a $x(t) > 0$, alors $t \mapsto \ln|u(t)| + i \arctan \dfrac{y(t)}{x(t)}$ est un relèvement continu de u.
   c) *Variante.* Si pour tout $t \in [0,1]$ on a $u(t) \notin \mathbb{R}_-$, alors $t \mapsto \ln|u(t)| + 2i \arctan \dfrac{y(t)}{|u(t)| + x(t)}$ est un relèvement continu de u.
3. Le cas de classe C^1.
   a) Soit $c \in \mathbb{C}$ tel que $e^c = u(0)$. On suppose que u est de classe C^1 et on pose $f(t) = c + \displaystyle\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)} ds$. Démontrer que f est un relèvement continu de u (on montrera que $t \mapsto u(t)e^{-f(t)}$ est constante).
   b) On suppose que u est continue et de classe C^1 par morceaux. Construire un relèvement continu de u.
4. Le cas général.
   a) Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait $\mathrm{Re}\dfrac{u(s)}{u(t)} > 0$ pour tous $s, t \in [0,1]$ tels que $|s - t| \leqslant 1/n$.
   b) En déduire qu'il existe $v : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ continue et C^1 (affine) par morceaux telle que, pour tout t on ait $\mathrm{Re}\dfrac{v(t)}{u(t)} > 0$.
   c) Conclure.
   d) *Variante - sans utiliser le cas de classe C^1.* Pour $0 \leqslant k < n$ posons

$$u_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leqslant k/n \\ \dfrac{u(t)}{u(k/n)} & \text{si } k/n \leqslant t \leqslant (k+1)/n \\ \dfrac{u((k+1)/n)}{u(k/n)} & \text{si } t \geqslant (k+1)/n \end{cases}$$

   Établir l'égalité $u(t) = u(0) \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} u_k(t)$ et conclure

7.17 Exercice. On se propose de donner deux démonstrations du théorème de Darboux . Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Soient $a, b \in I$ avec $a < b$. On veut démontrer que $f'([a,b])$ contient toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

Première démonstration. Définissons les fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ en posant

— $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ pour $x \neq a$ et $g(a) = f(a)$,

— $h(x) = \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b}$ pour $x \neq b$ et $h(b) = f'(b)$.

1. Démontrer que $g([a, b])$ et $h([a, b])$ et $g([a, b]) \cup h([a, b])$ sont des intervalles.
2. Conclure

Deuxième démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$. Soit $c \in]f'(a), f'(b)[$. Posons $g(x) = f(x) - cx$. Démontrer que le minimum de g sur $[a, b]$ n'est atteint ni en a ni en b et conclure.

7.18 Exercice. *Une application du théorème de Darboux.* Démontrer qu'une fonction convexe dérivable est de classe C^1 (voir aussi exerc. 7.10).

7.20 Exercice. *Indice de réfraction.*

1. Dans plan euclidien P, on se donne une droite D et deux points A, B situés de part et d'autre de D. On veut trouver le chemin le plus rapide pour aller de A à B sachant que dans le demi-plan de A on se déplace avec une vitesse v (dans toutes les directions) et dans le demi-plan de B avec une vitesse w. Le trajet effectué consiste en deux segments AM et MB. Comment choisir M pour que le temps de trajet soit minimal ?
2. On se pose le même problème avec deux points de l'espace situés de part et d'autre d'un plan.

7.21 Exercice. *Fonctions strictement convexes.* Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) Pour tous $x, z \in I$ avec $x \neq z$ et tout $\lambda \in]0, 1[$, on a $f\big((1-\lambda)x + \lambda z\big) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z)$.
   (ii) Pour tous $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} < \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x} < \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.
   (iii) Pour tous $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, on a $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} < \dfrac{f(z) - f(y)}{z - y}$.
   (iv) La restriction de f à tout intervalle $J \subset I$ d'intérieur non vide n'est pas affine.

   Si f vérifie ces conditions, on dit qu'elle est *strictement convexe.*
2. Soit f une fonction strictement convexe. On suppose que f atteint son minimum en un point $a \in I$. Démontrer que ce minimum est strict : pour tout $x \neq a$, on a $f(a) < f(x)$.

7.22 Exercice. *Inégalité de Jensen stricte.* Soit I un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Soit $a \in \mathring{I}$. Notons $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les dérivées à gauche et à droite de a.
   a) Démontrer que $f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$.
   b) Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $f'_g(a) \leqslant b \leqslant f'_d(a)$. Démontrer que pour tout $x \in I$, on a $f(x) - f(a) \geqslant b(x - a)$.
2. Soient $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum \lambda_i = 1$.
   a) Démontrer que $f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
   b) On suppose que f est strictement convexe qu'il existe $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tels que $x_i \neq x_j$, $\lambda_i \neq 0$ et $\lambda_j \neq 0$. Démontrer que $f\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

3. *Inégalité de Jensen et probabilités.* Soit X une variable aléatoire réelle prenant ses valeurs dans I. On suppose que X et $f(X)$ ont des espérances.
   a) Établir l'inégalité de Jensen : $\mathbb{E}(X) \in I$ et $\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$.
   b) On suppose que f est strictement convexe et $\mathbb{E}(f(X)) = f(\mathbb{E}(X))$. Démontrer que $X = \mathbb{E}(X)$ presque surement.

7.26 Exercice. On pose $f(x) = \sin(x^2)$. Calculer $f^{(14)}(0)$.

7.27 Exercice. Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle ouvert. Soient $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. Donner à l'aide d'une intégrale l'expression de l'application $F : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} telle que $F^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $F^{(n+1)} = f$.

7.30 Exercice. *Inégalité de Kolmogorov* (*cf.* [Monier, Exercices Analyse 1, 5.3.25]). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On suppose que f et f'' sont bornées et on pose $M_0 = \sup\{|f(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ et $M_2 = \sup\{|f''(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tous x et $h > 0$ on a
$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}\cdot$$
2. On pose $M_1 = \sup\{|f'(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que M_1 est fini et qu'on a l'inégalité $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.
3. Plus généralement on suppose que f est n fois dérivable et on pose $M_k = \sup\{|f^{(k)}(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$ (ce « sup » est pris dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$). Démontrer que si M_0 et M_n sont finis, alors pour tout k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a
   a) $M_k < +\infty$;
   b) $M_k \leqslant 2^{k(n-k)/2} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}$.