

Partie I : Première approche de la constante d'Euler

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc sur $[p, p+1]$. Donc pour tout réel t de $[p, p+1]$, on a $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$. D'après l'inégalité, on a

$$\frac{1}{p+1} = (p+1-p) \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq (p+1-p) \frac{1}{p} = \frac{1}{p}.$$

On en déduit que $0 = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \leq a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq a_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq \sum_{p=1}^n a_p = S_n \leq \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{somme télescopique}) \\ \leq 1.$$

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n , $S_n \leq 1$ et donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0.$$

Donc la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Etant majorée par 1, cette suite converge vers un réel noté γ . Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq S_n \leq 1$, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient $0 \leq \gamma \leq 1$.

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En posant $x = t + p$, on obtient

$$a_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{1}{t+p} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{t+p} \right) dt = \int_0^1 \frac{t}{p(t+p)} dt = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{t+p} dt.$$

Soit $p \geq 2$. Pour tout réel t de $[0, 1]$, on a $0 < p-1 \leq p+t \leq p+1$ et donc $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t+p} \leq \frac{1}{p-1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = \frac{1}{2p(p+1)} = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{p+1} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t+p} dt = a_p \leq \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{t}{p-1} dt = \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right).$$

4) Soient n et m deux entiers naturels tels que $m > n \geq 1$. Alors $S_m - S_n = \sum_{p=n+1}^m a_p$. D'après la question précédente,

pour $p \geq n+1 \geq 2$, $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq a_p \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right)$. En additionnant membre à membre ces encadrements, on obtient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) \leq S_m - S_n \leq \sum_{p=n+1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right),$$

(sommés télescopiques). En faisant tendre m vers $+\infty$ à n fixé, on obtient $\frac{1}{2(n+1)} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2n+2} \leq \gamma - S_n \leq \frac{1}{2n}.$$

5) Par suite, pour $n \geq 1$, $\frac{n}{n+1} \leq 2n(\gamma - S_n) \leq 1$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n(\gamma - S_n) = 1$ ou encore $\gamma - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$ ou enfin $\gamma - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Maintenant, $S_n = H_n - \ln(n+1)$ et donc

$$\begin{aligned} H_n &= \ln(n+1) + S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(\gamma - \frac{1}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

6) Soit $n \geq 1$. D'après la question 4), $\frac{1}{2n+2} \leq \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n}$ et donc

$$0 \leq \gamma - S_n - \frac{1}{2n+2} = \gamma - T_n \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2n(n+1)}.$$

7) Soit $n \geq 1$.

$$0 \leq \gamma - T_n < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2n(n+1)} < 10^{-2} \Leftrightarrow n(n+1) > 50 \Leftrightarrow n = 7.$$

Ainsi, T_7 est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près et donc

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \ln(8) \leq \gamma < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{16} - \ln(8) + 10^{-2}.$$

Ceci fournit encore $0,575 \dots < \gamma < 0,575 \dots + 10^{-2}$ et donc

$$0,57 < \gamma < 0,59 \text{ ou encore } \gamma = 0,58 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

(Ce dernier encadrement n'est pas d'amplitude 10^{-2} mais fournit une valeur approchée de γ à 10^{-2} près).

Partie II : Deux représentations intégrales de la constante d'Euler

1) a) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. De plus, $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-t}$ et en particulier, $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt$ est une intégrale absolument convergente et donc convergente.

De même, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$. Par suite, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ est une intégrale absolument convergente et donc convergente.

Mais alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$ est une intégrale convergente.

b) Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} &= \frac{1}{1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1 - \frac{t}{2} + o\left(\frac{1}{t}\right)} - 1 \right) = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t}{2} + o\left(\frac{1}{t}\right) - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2}$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0^+} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{2}$.

c) Ainsi, la fonction $t \mapsto e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$ est continue sur $]0, 1[$ et se prolonge par continuité en 0. Par suite, l'intégrale $\int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$ est une intégrale convergente.

Puisque les intégrales $\int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$ et $\int_1^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$ sont des intégrales convergentes, $\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} dt - \frac{1}{t} \right) dt$ est une intégrale convergente.

2) a) Soient x et y deux réels strictement positifs. Les fonctions $t \mapsto \frac{e^{-at}}{t}$ et $t \mapsto \frac{e^{-bt}}{t}$ sont continues sur $[x, y]$. Donc, chacune des intégrales proposées existe.

En posant $u = at$ dans la première intégrale (de sorte que $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$) et $v = bt$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_x^y \frac{e^{-at}}{t} dt - \int_x^y \frac{e^{-bt}}{t} dt = \int_{ax}^{ay} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{bx}^{by} \frac{e^{-v}}{v} dv = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

b) Soient a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$ et z un réel tel que $z > 0$. Alors $0 < az \leq bz$. Ensuite, pour tout réel t de $[az, bz]$, $e^{-bz} \leq e^{-t} \leq e^{-az}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$e^{-bz} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = \int_{az}^{bz} \frac{e^{-bz}}{t} dt \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-az}}{t} dt = e^{-az} \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

c) Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $e^{-bx} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$ et $e^{-ax} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$ tendent vers $\ln \left(\frac{b}{a} \right)$. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$.

D'autre part, pour tout $y > 0$, $0 \leq \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq e^{-ay} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$ et comme $\lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-ay} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t} dt = 0.$$

Quand $0 < a \leq b$, en faisant tendre x vers 0 puis y vers $+\infty$ dans l'égalité de la question a), on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \left(\frac{b}{a} \right)$. Cette égalité reste vraie si $a > b$ en échangeant les rôles de a et b et on a donc montré que

$$\forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln \left(\frac{b}{a} \right).$$

3) Une première représentation intégrale de la constante d'Euler

a) Soit $t > 0$. On sait que pour tout réel q de l'intervalle $] -1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et donc, puisque $e^{-t} \in]0, 1[$, $1, 1[$,

$$\frac{1}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. $\sum_{n=0}^N (e^{-nt} - e^{-(n+1)t}) = 1 - e^{-(N+1)t}$ (somme télescopique). Maintenant, $\lim_{N \rightarrow +\infty} e^{-(N+1)t} = 0$ (car $t > 0$).

On en déduit que la série numérique de terme général $e^{-nt} - e^{-(n+1)t}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-nt} - e^{-(n+1)t}) = 1$ puis que

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right).$$

b) Mais alors

$$e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) = e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{-nt} - e^{-(n+1)t}}{t} \right) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} \right).$$

c) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée seconde à savoir la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est positive sur \mathbb{R} . Donc la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est convexe sur \mathbb{R} . Par suite, son graphe est au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse 0 ou encore $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t} \geq 1 - t$.

Si de plus $t > 0$, on a successivement $t - (1 - e^{-t}) \geq 0$ puis $1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \geq 0$ après division des deux membres par le réel strictement positif t .

d) Pour $t > 0$, posons $u(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right)$ et pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(t) = e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}$.

• Chaque fonction $u_n, n \in \mathbb{N}$, est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. De plus, d'après la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0, u_n(t) = e^{-(n+1)t} \left(1 - \frac{1 - e^{-t}}{t} \right) \geq 0$. Donc chaque fonction $u_n, n \in \mathbb{N}$, est positive sur $]0, +\infty[$.

• La série de fonctions de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}$, converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction u (d'après la question 3)b)) et la fonction u est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} dt = \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) = a_{n+1}$ (d'après

la question 2)c)). Par suite, pour $n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^n \int_0^{+\infty} u_p(t) dt = \sum_{p=0}^n a_{p+1} = \sum_{p=1}^{n+1} a_p = S_{n+1}$. D'après la partie I, la série

numérique de terme général $\int_0^{+\infty} u_n(t) dt, n \in \mathbb{N}$, converge et a pour somme γ .

D'après le théorème admis par l'énoncé en début de deuxième partie, on en déduit que la fonction u est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} u(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt = \gamma.$$

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

4) Une deuxième représentation intégrale de la constante d'Euler

a) Soit $y > 0$. On a vu à la question II.1)a) que l'intégrale $\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$ converge. De plus,

$$\int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = [\ln(1 - e^{-t})]_y^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-t}) - \ln(1 - e^{-y}) = -\ln(1 - e^{-y}).$$

Mais alors, quand y tend vers 0,

$$\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \ln y - \ln(1 - e^{-y}) = \ln \left(\frac{y}{1 - e^{-y}} \right) = \ln \left(\frac{y}{y + o(1)} \right) = \ln(1 + o(1)) = o(1).$$

Donc $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = 0$.

b) Soit $y > 0$. D'après la question 3)d),

$$\begin{aligned} \gamma + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt. \end{aligned}$$

c) Par suite, $\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right)$.

Puisque $\int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt$ converge en 0, on en déduit que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^y e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$. D'autre part,

d'après la question a), $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \right) = 0$ et finalement

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0.$$

d) La fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est continue sur $]0, +\infty[$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $e^{-t} \ln t \sim \ln t = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$. On sait que la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ puisque $\frac{1}{2} < 1$ et donc la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Finalement la fonction $t \mapsto e^{-t} \ln t$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Soient y et A deux réels tels que $0 < y < A$. Les deux fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto \ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[y, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_y^A e^{-t} \ln t dt = [-e^{-t} \ln t]_y^A + \int_y^A \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-y} \ln y - e^{-A} \ln A + \int_y^A \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Quand A tend vers $+\infty$, on obtient $\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Quand y tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(e^{-y} \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right).$$

e) Soit $y > 0$.

$$\gamma + \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt = \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) + \left(\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt - e^{-y} \ln y - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) + (e^{-y} \ln y - \ln y).$$

D'après la question c), $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\gamma + \ln y + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0$.

D'après la question d), $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt - e^{-y} \ln y - \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) = 0$.

Enfin, quand y tend vers 0 par valeurs supérieures,

$$e^{-y} \ln y - \ln y = (e^{-y} - 1) \ln y \sim -y \ln y,$$

et donc $\lim_{y \rightarrow 0^+} (e^{-y} \ln y - \ln y) = 0$. Finalement, $\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\gamma + \int_y^{+\infty} e^{-t} \ln t dt \right) = 0$ ou encore

$$\gamma = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt.$$

Partie III : Pour une valeur approchée de la constante d'Euler

1) a) D'après la question II.4.a), $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = -\ln(1-e^{-1})$. D'autre part,

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt = [\ln t - \ln(1-e^{-t})]_0^1 = -\ln(1-e^{-1}) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{t}{1-e^{-t}} \right) = -\ln(1-e^{-1}).$$

Donc, $\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt = -\ln(1-e^{-1})$.

b) D'après la question II.3)d) et au vu de la convergence de chacune des intégrales considérées,

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt = \int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} - \frac{e^{-t}}{t} \right) dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} \right) dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

2) a) Pour tout entier $k \geq 1$, $0 \leq \frac{H_k}{k!} \leq \frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$. On en déduit que la série entière de somme F a un rayon de convergence infini et en particulier F est définie et dérivable sur \mathbb{R} . De plus, la dérivée de F s'obtient par dérivation terme à terme.

b) Pour tout réel $x > 0$, $F(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} x^k$ (car $H_0 = 0$) et donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{H_k}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{H_{k+1}}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(H_k + \frac{1}{k+1} \right) x^k \\ &= F(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = F(x) + \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = F(x) + \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

c) Soit $x > 0$. D'après ce qui précède,

$$(e^{-x}F)'(x) = e^{-x}(F'(x) - F(x)) = \frac{1 - e^{-x}}{x}.$$

Maintenant, la fonction $t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0. Cette fonction est donc intégrable sur $]0, x]$. En intégrant sur $]0, x]$, on obtient

$$\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \int_0^x (e^{-t}F)'(t) dt = e^{-x}F(x) - e^0F(0) = e^{-x}F(x) - H_0 = e^{-x}F(x).$$

Finalement,

$$\forall x > 0, F(x) = e^x \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

3) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} \gamma + \ln x &= \left(\int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) + \int_1^x \frac{1}{t} dt = \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt + \int_x^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt - \int_x^1 \frac{1}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= e^{-x}F(x) - \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt. \end{aligned}$$

$$\forall x > 0, \gamma + \ln x = e^{-x}F(x) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

4) Soit $k \geq an + 1$. Alors $H_k = \sum_{p=1}^k \frac{1}{p} \leq k$

$$\begin{aligned} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k &= \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)! H_k}{k!} n^{k-(an+1)} \\ &\leq \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)! k}{k!} n^k = \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{(an)!}{(k-1)!} n^k \\ &\leq \frac{1}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{1}{\underbrace{(an) \times \dots \times (an)}_{(k-1)-(an)}} n^k = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^{k-(an+1)} \\ &= \frac{n^{an+1}}{(an)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{a} \right)^k = \frac{n^{an+1}}{(an)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} \left(\text{car } \left| \frac{1}{a} \right| < 1 \right) \\ &\leq \frac{a}{a-1} \frac{n^{an+1}}{\left(\frac{na}{e} \right)^{an} \sqrt{2\pi an}} = \frac{a}{a-1} \frac{n}{\sqrt{2\pi an}} \left(\frac{e}{a} \right)^{an} = \frac{a}{a-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a} \right)^{an}. \end{aligned}$$

5) Soit n un entier naturel et a un réel positif tel que $a > 1$. D'après la question 4)

$$\gamma + \ln n = e^{-n} F(n) - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k + e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{an} \frac{H_k}{k!} n^k \right| &= \left| e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k - \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right| \leq e^{-n} \sum_{k=an+1}^{+\infty} \frac{H_k}{k!} n^k + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &\leq \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{a}{a-1} \frac{e^{-n} \sqrt{n}}{\sqrt{2\pi a}} \left(\frac{e}{a}\right)^{an} + \frac{e^{-n}}{n} \end{aligned}$$

6) On prend en particulier $a = 3$ et on obtient pour tout entier $n \geq 1$,

$$\left| \gamma + \ln n - e^{-n} \sum_{k=0}^{3n} \frac{H_k}{k!} n^k \right| \leq \frac{3}{2\sqrt{6\pi}} e^{-n} \sqrt{n} \left(\frac{e}{3}\right)^{3n} + \frac{e^{-n}}{n}.$$

La machine fournit $\frac{3}{2\sqrt{6\pi}} e^{-21} \sqrt{21} \left(\frac{e}{3}\right)^{63} + \frac{e^{-21}}{21} < 10^{-10}$ et donc $e^{-21} \sum_{k=1}^{63} \frac{H_k}{k!} 21^k - \ln(21)$ est une valeur approchée de γ à 10^{-10} près.

Partie IV : La constante d'Euler somme de la série de Vacca (1910)

1) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_p &= p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) = p \left(\sum_{2^p \leq 2j < 2^{p+1}} \frac{1}{2j} - \sum_{2^p \leq 2j+1 < 2^{p+1}} \frac{1}{2j+1} \right) \\ &= p \left(\frac{1}{2} \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2j+1} \right) = p \left(\frac{1}{2} \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{j} - \left(\sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} - \sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{2j} \right) \right) \\ &= p \left(\sum_{j=2^{p-1}}^{2^p-1} \frac{1}{j} - \sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} \right) = p(\sigma_{p-1} - \sigma_p). \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{p=1}^n v_p = \sum_{p=1}^n p\sigma_{p-1} - \sum_{p=1}^n p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)\sigma_p - \sum_{p=0}^n p\sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} ((p+1) - p)\sigma_p - n\sigma_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\sum_{h=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{h} \right) = \sum_{h=1}^{2^n-1} \frac{1}{h} = H_{2^n} - \frac{1}{2^n}.$$

d)

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n v_p &= \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p - n\sigma_n = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n(H_{2^{n+1}-1} - H_{2^n-1}) = H_{2^n} - \frac{1}{2^n} - n \left(H_{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} - H_{2^n} + \frac{1}{2^n} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(2^n) + \gamma - n(\ln(2^{n+1}) + \gamma - \ln(2^n) - \gamma) + o(1) = n \ln 2 - n \ln 2 + \gamma + o(1) = \gamma + o(1). \end{aligned}$$

Donc la série numérique de terme général v_p , $p \geq 1$, converge et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} v_p = \gamma.$$

2) a) Posons $v_n = \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{n}$. Pour $p \geq 1$, $2^p = (1+1)^p = 1 + p + \dots > p$ et donc pour tout entier naturel non nul p ,

$$v_{2^p-1} - v_p = \frac{p-1}{2^p-1} - \frac{p}{2^p} = \frac{(p-1)2^p - p(2^p-1)}{(2^p-1)2^p} = \frac{p-2^p}{2^p(2^p-1)} < 0$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est donc pas décroissante à partir d'un certain rang et on ne peut pas appliquer le critère spécial des séries alternées.

b) Soient n et m deux entiers naturels tels que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$.

Puisque la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, on sait que la valeur absolue de la somme $\sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k}$ est majorée par la valeur absolue de son premier terme à savoir $\frac{(-1)^{2^{n+1}}}{2^{n+1}}$. Donc

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{2^{n+1}}}{2^{n+1}} \right| = \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Pour $2^{n+1} \leq k \leq m < 2^{n+2}$, on a $n+1 \leq \log_2(k) < n+2$ et donc $[\log_2(k)] = n+1$. Par suite,

$$\left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| = (n+1) \left| \sum_{k=2^{n+1}}^m \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{n+1}{2^n}.$$

c) Soient m un entier naturel supérieur ou égal à 4. Soit n l'entier naturel tel que $2^{n+1} \leq m < 2^{n+2}$ c'est-à-dire $n = [\log_2 m] - 1$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m u_k &= \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} u_k + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k = \sum_{p=0}^n p \left(\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{(-1)^k}{k} \right) + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \\ &= \sum_{p=0}^n v_p + \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k. \end{aligned}$$

Mais alors

$$\left| \sum_{k=1}^m u_k - \sum_{p=0}^n v_p \right| = \left| \sum_{k=2^{n+1}}^m u_k \right| \leq \frac{n}{2^n} = \frac{[\log_2 m] - 1}{2^{[\log_2 m] - 1}} \leq \frac{\log_2 m}{2^{\log_2 m - 2}} = \frac{4 \log_2 m}{m}.$$

D'après un théorème de croissances comparées, $\frac{4 \log_2 m}{m}$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ et d'après la question 1)d),

$\sum_{p=0}^n v_p = \sum_{p=0}^{[\log_2 m] - 1} v_p$ tend vers γ quand m tend vers $+\infty$. On en déduit que la suite $\left(\sum_{k=1}^m u_k\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge vers γ .

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \gamma.}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque la suite $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \geq 2^n}$ tend vers 0 en décroissant, r_n existe d'après le critère spécial aux séries alternées. De plus, on sait que la valeur absolue de r_n est majorée par la valeur absolue du premier terme de la somme égale à r_n et donc $|r_n| \leq \left| \frac{(-1)^{2^n}}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $|r_n| \leq \frac{1}{2^n}$ et donc la série de terme général r_n est absolument convergente.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $v_k = k \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^j}{j} = k(r_k - r_{k+1})$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k(r_k - r_{k+1}) = \sum_{k=1}^n k r_k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) r_k = \sum_{k=1}^n r_k - n r_{n+1}$$

avec $|n r_{n+1}| \leq \frac{n}{2^{n+2}}$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n r_{n+1} = 0$. En tenant compte de $v_0 = 0$, on a donc $\sum_{k=1}^{+\infty} r_k = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k = \gamma$.

$$\boxed{\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=2^n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} \right),}$$

car si $n \geq 1$, 2^n est un nombre pair et donc $(-1)^{2^n+j} = (-1)^j$.

Partie V : La formule de Gosper (1972)

1) $\forall x \in \mathcal{F}$, $\Delta(x) = \text{Id}_{\mathcal{F}}(x) - T(x)$ et donc $\Delta = \text{Id}_{\mathcal{F}} - T$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathcal{F}$ et $k \in \mathbb{N}$. Puisque les endomorphismes $\text{Id}_{\mathcal{F}}$ et T commutent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire

$$\Delta^n(x)[k] = (\text{Id}_{\mathcal{F}} - T)^n(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} T^p(x)[k] = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_{k+p}.$$

2) a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq p + 1$

$$0 \leq \frac{\binom{n}{p}}{2^n} = \frac{1}{p!} \times \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{2^n} \leq \frac{1}{p!} \times \frac{n^p}{2^n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p!} \times \frac{n^p}{2^n} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} = 0$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq k$, $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. k est dorénavant fixé. Pour $n \geq k$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right| &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} |u_p| = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n}{p} |u_p| + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k}^n \binom{n}{p} |u_p| \\ &< \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n}{p} |u_p| + \frac{1}{2^n} \sum_{p=k}^n \binom{n}{p} \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k-1} \binom{n}{p} |u_p| + \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{(1+1)^n}{2^n} \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question 1), $\forall p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| = 0$ (somme d'un

nombre fixe de suites de limites nulles). Par suite, il existe $n_0 \geq k$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\sum_{p=0}^{k-1} \frac{\binom{n}{p}}{2^n} |u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_0$, on a alors $\left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p < \varepsilon$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = 0$.

c) Supposons maintenant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ . Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. D'après la question b), il en est de même de la suite $\left(\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} v_p &= \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (u_p - \ell) = \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p - \left(\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \right) \ell \\ &= \left(\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right) - \frac{(1+1)^n}{2^n} \ell = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p \right) - \ell. \end{aligned}$$

Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u_p = \ell$.

3) a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 V_N &= \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} x_p \right) \quad (\text{d'après la question V.1}) \\
 &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (U_p - U_{p-1}) \right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} U_{p-1} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=-1}^{n-1} \binom{n}{p+1} U_p \right) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} U_p - \sum_{p=0}^n \binom{n}{p+1} U_p \right) \\
 &\quad (\text{car } U_{-1} = 0 \text{ et } \binom{n}{n+1} = 0) \\
 &= \sum_{n=0}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^n \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) U_p \right) = \sum_{p=0}^N \left(\sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} \right) \right) U_p \\
 &= \sum_{p=0}^N \left(\sum_{n=p}^N \frac{1}{2^{n+1}} \left(\left(\binom{n+1}{p+1} - \binom{n}{p+1} \right) - \binom{n}{p+1} \right) \right) \quad (\text{car } \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}) \\
 &= \sum_{p=0}^N \sum_{n=p}^N \left(\frac{1}{2^{n+1}} \binom{n+1}{p+1} - \frac{1}{2^n} \binom{n}{p+1} \right) U_p = \sum_{p=0}^N \left(\frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} - \frac{1}{2^p} \binom{p}{p+1} \right) U_p \quad (\text{somme télescopique}) \\
 &= \sum_{p=0}^N \frac{1}{2^{N+1}} \binom{N+1}{p+1} U_p.
 \end{aligned}$$

$$\forall N \in \mathbb{N}, V_N = \sum_{n=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}.$$

b) Posons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k = \lim_{j \rightarrow +\infty} U_j$. Pour tout entier naturel N ,

$$\sum_{k=0}^N \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = V_N = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{p=0}^N \binom{N+1}{p+1} U_p = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1} = \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1}.$$

Puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} U_{k-1} = S$, la question 2)c) permet d'affirmer que la suite $\left(\frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1} \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge et que

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{N+1}} \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} U_{k-1} = S$ ou encore la série numérique de terme général $\frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(x)[0]}{2^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x_k.$$

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 \Delta^m(x)[0] &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{1}{2^{n+k}} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} x^{2^n+k-1} \right) dx = \int_0^1 x^{2^n-1} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} x^k \right) dx \\
 &= \int_0^1 x^{2^n-1} (1-x)^m dx = \frac{(2^n-1)! m!}{(2^n+m)!} \quad (\text{d'après le résultat admis par l'énoncé}) \\
 &= \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\frac{(2^n+m)!}{(2^n)! m!}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.
 \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}, \Delta^m(x)[0] = \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{\binom{2^n+m}{m}}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque la suite $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n + j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 en décroissant, la série de terme général $(-1)^j x_j$ converge d'après le critère spécial aux séries alternées. Mais alors la question précédente permet d'affirmer que la série de terme général $\frac{\Delta^m[x](0)}{2^{m+1}}$, $m \in \mathbb{N}$ converge et que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{2^n + j} = \sum_{j=0}^n (-1)^j x_j = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Delta^m[x](0)}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}.$$

Mais alors la question IV.3)b) permet d'affirmer que

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}}.$$

c) Par suite, la suite double positive $\left(\frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} \right)_{n \geq 1, m \geq 0}$ est sommable et

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{m+n=p} \frac{1}{2^{m+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + m}{m}} \right) = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{k+n=p} \frac{1}{2^{k+n+1}} \frac{1}{\binom{2^n + k}{k}} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k} + k}{k}} \right). \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} + \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{p+1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\binom{2^{p-k} + k}{k}} \right).$$