Université Paris Diderot (Paris 7) *7 janvier 2012*

Préparation à l'Agrégation Interne

Corrigé du devoir N° 8

(Agrégation interne 2004 - 2ème épreuve de mathématiques)

Partie I : Questions préliminaires. Exemples

A. Un lemme de Cantor

1. En prenant $x = 0$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Comme pour tout x la suite $\cos nx$ est bornée, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cos nx = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \sin nx = 0$

2.a.i. Supposons que la suite (b_n) ne tende pas vers zéro. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ satisfaisant $|b_n| \geqslant \varepsilon$.

On construit alors n_k par récurrence, en prenant successivement $N = 1$, puis, supposant n_k construit, $N = 3n_k$.

ii. On construit p_k par récurrence. Posons $p_1 = 0$ et supposons p_k construit. On a $J_{k+1} \subset J_k$ si et seulement si $\dfrac{u_k}{n_k} \leqslant \dfrac{u_{k+1}}{n_{k+1}}$ et $\dfrac{v_k}{n_k} \geqslant \dfrac{v_{k+1}}{n_{k+1}}$, c'est-à-dire,

$$\frac{n_{k+1}}{n_k}\Big(\frac{1}{6} + p_k\Big) - \frac{1}{6} \leqslant p_{k+1} \leqslant \frac{n_{k+1}}{n_k}\Big(\frac{5}{6} + p_k\Big) - \frac{5}{6}. \qquad (*)$$

Or $\left(\dfrac{n_{k+1}}{n_k}\Big(\dfrac{5}{6} + p_k\Big) - \dfrac{5}{6}\right) - \left(\dfrac{n_{k+1}}{n_k}\Big(\dfrac{1}{6} + p_k\Big) - \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{2n_{k+1}}{3n_k} - \dfrac{2}{3} \geqslant 1$, donc il existe un entier p_{k+1} satisfaisant $(*)$.

iii. Par le théorème des segments emboîtés, $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} J_k \neq \emptyset$. Soit $x \in \bigcap\limits_{k\geqslant 1} J_k$. Il vient, comme $n_k x \in [a_k, b_k]$

$$|b_{n_k} \sin(n_k x)| \geqslant |b_{n_k}| \frac{1}{2} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

en contradiction, avec la première question.

b.i. On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} (b_n \sin(nx))^2 \mathrm{d}x = \pi b_n^2$.

ii. Si la suite (b_n) est bornée, la suite de fonctions $(b_n^2 \sin^2(nx))$ est dominée par une fonction constante donc intégrable et comme elle converge simplement vers 0, on a, par le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty} \pi b_n^2 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} (b_n \sin(nx))^2 \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to+\infty} (b_n \sin(nx))^2 \mathrm{d}x = 0$$

La suite (b_n) tend donc vers 0.

iii. Comme $|b'_n \sin nx| \leqslant |b_n \sin nx|$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |b'_n \sin nx| = 0$. Donc par le résultat précédent, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} b'_n = 0$. En particulier, pour n assez grand, $b'_n < 1$, donc $b'_n = |b_n|$. On en déduit que b_n tend vers 0.

B. L'espace H

> Rappel. *Si f est une fonction continue et C^1 par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si $a, b \in I$, on a (en découpant l'intervalle $[a, b]$ en un nombre fini de segments sur lesquels f' est continue) $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$. En particulier, si f est de plus 2π-périodique, appliquant cela à la fonction de $t \mapsto f(t)\cos nt$ et à $t \mapsto f(t)\sin nt$ sur un intervalle de longueur 2π, il vient $a_n(f') = nb_n(f)$ et $b_n(f') = -na_n(f)$.*

1. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\left|\dfrac{a_n}{n}\sin(nx)\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, donc la série $\sum \left|\dfrac{a_n}{n}\sin(nx)\right|$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \to \dfrac{a_n}{n}\sin(nx)$ est continue sur $[0,\pi]$. Par convergence normale sur $\mathbb{R}$, $\theta(\alpha)$ est une fonction continue sur $[0,\pi]$, à valeurs réelles.

c) L'application θ est manifestement linéaire. *Ne passez pas du temps à justifier cela : cette question rapporte sûrement très peu de points...*

Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \delta_{n,m}$. Par convergence normale, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \theta(\alpha)(x)\sin mx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n}\int_0^\pi \sin nx \sin mx \,\mathrm{d}x = \frac{\alpha_m}{m}.$$

Si $\theta(\alpha) = 0$, il vient donc $\alpha = 0$ donc θ est injective.

2. a) L'application $(f,g) \to (f|g)$ est bilinéaire et symétrique. On a $(f|f) \geqslant 0$ et, puisque f' est continue par morceaux, si $(f|f) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^\pi (f')^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, donc f' est nulle en tout point de continuité de f'. On en déduit que f est constante, et comme $f(0) = 0$, il vient $f = 0$.

b) Pour $x \in [-\pi, 0]$, posons $\tilde{f}(x) = -f(-x)$, puis pour $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$, posons $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x - 2k\pi)$. En particulier, $\tilde{f}(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (car $f \in E$).

La fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue et C^1 par morceaux sur chaque intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, donc sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et impaire. Ainsi, pour tout $n \geqslant 0$, $a_n(\tilde{f}) = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$ on a $b_n(\tilde{f}) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$

Par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de $\tilde{f}$ converge normalement vers $\tilde{f}$. Donc, pour tout $t \in [0,\pi]$, on a $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$.

La fonction $\tilde{f}'$ est continue par morceaux, paire et on a pour tout n, $a_n(\tilde{f}') = nb_n(\tilde{f})$, $b_n(\tilde{f}') = 0$. Posons $\alpha_n = a_n(\tilde{f}')$. Par le théorème de Parseval, on a $\alpha \in \ell^2_{\mathbb{R}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (f')^2(t)\mathrm{d}t$. Donc $f = \theta(\alpha) \in H$ et $(f|f) = \|f\|_H^2$.

c) Notons $c_{0,0} \subset \ell^2_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des suites $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ nulles à partir d'un certain rang. Comme $c_{0,0}$ est dense dans $\ell^2_{\mathbb{R}}$ et θ est isométrique, $\theta(c_{0,0})$ est dense dans H. Or $\theta(c_{0,0})$ est formé de fonctions de classe C^∞ nulles en 0 et en π, donc $\theta(c_{0,0}) \subset E$.

3. a) Soient $f \in H$ et $t \in \mathbb{R}$. Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz on a

$$|f(t)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| |\sin(nt)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n}{n}\right| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\|f\|_H = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\|f\|_H$$

b) Soit $f \in E$. Pour $a \in]0,\pi[$, on a $(f|h_a) = \dfrac{2}{\pi a}\displaystyle\int_0^a f'(t)\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi(\pi-a)}\int_a^\pi f'(t)\mathrm{d}t = \frac{2f(a)}{a(\pi-a)}$. En particulier, $\|h_a\|^2 = \dfrac{2}{a(\pi-a)}$. Il vient $|f(a)| \leqslant \dfrac{a(\pi-a)}{2}|(f \mid h_a)| \leqslant \dfrac{a(\pi-a)}{2}\|h_a\|_H\|f\|_H = \sqrt{\dfrac{a(\pi-a)}{2}}\|f\|_H$.

Comme $f \in E$, cette inégalité reste valable en 0 et en π. Enfin, pour tout $a \in [0,\pi]$, on a $a(\pi - a) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}$. Donc $\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{8}}\|f\|_H$.

Comme $\|\cdot\|_\infty \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}\|\cdot\|_H$, et par l'inégalité triangulaire, les normes $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont lipschitziennes donc continues. Par densité de E dans $(H, \|\cdot\|_H)$, cette dernière inégalité reste valable pour $f \in H$.

Enfin, on a $\|h_{\pi/2}\|_\infty = 1$ et on a $\|h_{\pi/2}\|_H = \dfrac{\sqrt{8}}{\pi}$; on en déduit que $\dfrac{\pi}{\sqrt{8}}$ est la meilleure constante possible.

5. a) Par continuité de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$. La suite $(\|f_n\|_\infty)$est donc bornée.

b) Pour $t \in [0,\pi]$ (sauf peut-être en un nombre fini de points), on a $g_p'(t) - g_q'(t) = f_p'(t)F'\circ f_p(t) - f_q'(t)F'\circ f_q(t) = (f_p'(t) - f_q'(t))F'\circ f_q(t) + f_p'(t)(F'\circ f_p(t) - F'\circ f_q(t)$. La première inégalité résulte de l'inégalité de Minkowski pour la norme $g \mapsto \sqrt{\int_0^\pi g(t)^2\,\mathrm{d}t}$.

On a $|F'\circ f_q(t)| \leqslant M_1$, donc $\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big((f_p'(t) - f_q'(t))F'(t)\circ f_q(t)\Big)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant M_1\|f_p - f_q\|_H$.

Par le théorème des accroissements finis, on a $\Big|F'\circ f_p(t) - F'\circ f_q(t)\Big| \leqslant M_2|f_p(t) - f_q(t)|$; or $|f_p(t) - f_q(t)| \leqslant \|f_p - f_q\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{8}}\|f_p - f_q\|_H$. Il vient $\left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(f_p'(t)(F'\circ f_q(t) - F'\circ f_p(t))\Big)^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{8}}M_2\|f_p\|_H\|f_p - f_q\|_H$.

c) La suite (f_n) convergeant vers f dans H est de Cauchy pour $\|\cdot\|_H$. L'inégalité précédente montre que la suite (g_n) est de Cauchy et donc converge dans H vers une fonction g. Les g_n sont éléments de E puisque F est de classe C^1. Or $\|g_n - g\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{8}}\|g_n - g\|_H \longrightarrow 0$. Par continuité de F, pour tout $t \in [0,\pi]$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(F\circ f_n)(t) = (F\circ f)(t)$. Par unicité de la limite, il vient $g = F\circ f$.

d) Par la question précédente, avec $F(x) = x^2$, pour $(f,g) \in H^2$, on a $(f+g)^2 \in H$ et $(f-g)^2 \in H$. Donc $fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right) \in H$.

Partie II. Pseudo–dérivée seconde au sens de Schwarz

1. D'après la formule de Taylor–Young à l'ordre 2, on a $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = h^2 f''(x) + o(h^2)$. Donc $f^{('')}(x)$ existe et vaut $f''(x)$.

2. a) La fonction φ est continue comme somme de fonctions continues et on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.
On a $\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) + 2h^2\varepsilon}{h^2}$. Ainsi $\varphi^{('')}(x)$ existe et $\varphi^{('')}(x) = 2\varepsilon$.

Si φ admet un maximum local en $x \in]a,b[$, alors pour h assez petit, on a, $\frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} \leqslant 0$, et lorsque h tend vers 0, $\varphi^{('')}(x) = 2\varepsilon \leqslant 0$, ce qui est absurde.

b) Comme $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, pour tout $x \in [a,b], \varphi(x) \leqslant 0$, et, pour tout $\varepsilon > 0$

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \leqslant \varepsilon(x-a)(b-x)$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il vient, pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \leqslant 0$.

Appliquant ce qui précède à $-f$, (qui vérifie $(-f)^{('')} = 0$), il vient $f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \geqslant 0$.

Finalement f est une fonction affine sur $[a,b]$. Comme c'est vrai pour tout a, b, f est affine sur $\mathbb{R}$.

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme la série $\sum(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ est convergente, son terme général tend vers 0. Par le lemme de Cantor, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. les suites (a_n) et (b_n) sont donc bornées et pour tout x réel $\left|\frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^2}\right| \leqslant \frac{C}{n^2}$ ce qui entraîne une convergence normale de la série $\sum(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ et donc l'existence et la continuité de F.

b) On a $2e^{inx} - e^{in(x+h)} - e^{in(x-h)} = 2e^{inx}(1 - \cos nh) = 4e^{inx}\sin^2\frac{nh}{2}$. On a donc

$$\Delta(x,h) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{n^2h^2}(2e^{inx} - e^{in(x+h)} - e^{in(x-h)})\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)u(nh).$$

c) On a

$$\sum_{k=0}^{n}(S_k(x) - f(x))(u(kh) - u((k+1)h)) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n}(S_k(x) - f(x))u(kh) - \sum_{k=0}^{n}(S_k(x) - f(x))u((k+1)h)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}(S_k(x)-f(x))u(kh) - \sum_{k=1}^{n+1}(S_{k-1}(x)-f(x))u(kh)\\
&= -f(x) + \left(\sum_{k=1}^{n}(S_k(x)-S_{k-1}(x))u(kh)\right) - (S_n(x)-f(x))u((n+1)h)
\end{aligned}
$$

Or, lorsque n tend vers l'infini, pour tout x réel, $|u((n+1)h)| \leqslant \dfrac{4}{(n+1)^2h^2} \to 0$ et $|S_n(x)-f(x)| \to 0$

d.i. La fonction u est de classe C^∞. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a $|u((n+1)h)-u(nh)| = \left|\int_{nh}^{(n+1)h} u'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} |u'(t)|\,\mathrm{d}t$, d'où le résultat.

ii. On a $u'(t) = \dfrac{2}{t^2}\left[-\dfrac{4}{t}\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)+\sin(t)\right]$ pour $t \neq 0$ et $u'(0)=0$. En particulier $u'(t) = O(t^{-2})$, donc u' est bornée et intégrable. La suite $S_n(x)-f(x)$ converge vers 0 donc est bornée. Posons $M = \sup_n \|S_n(x)-f(x)\|$, $A = M\|u'\|_\infty$ et $B = \int_0^\infty |u'(t)|\,\mathrm{d}t$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geqslant N$ on ait $2B\,|S_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$. Alors si $h \in \mathbb{R}_+^*$ est tel que $2ANh \leqslant \varepsilon$, on a $\sum_{n=0}^{N-1} |(S_n(x)-f(x))(u(nh)-u((n+1)h))| \leqslant M\int_0^{Nh}|u'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon/2$ et $\sum_{n=N}^{\infty} |(S_n(x)-f(x))(u(nh)-u((n+1)h))| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2B}\int_{Nh}^{+\infty}|u'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon/2$, donc $|\Delta(x,h)-f(x)| \leqslant \varepsilon$.

iii. On a $G(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$. La fonction f étant continue, G est dérivable et l'on a $G'(x) = xf(x) + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x)$. Donc G est de classe C^2 et $G'' = f$.

iv. Par ce qui précède $F-G$ admet une dérivée seconde au sens de Schwarz et l'on a $(F-G)^{('')} = 0$, et donc $F-G$ est une fonction affine.

e) La question d) prouve que F est de classe C^2 et $F''=f$. Par intégration par partie, il vient $a_n(f) = -n^2a_n(F)$ et $b_n(f) = -n^2b_n(F)$. Or F étant somme d'une série de Fourier normalement convergente, il vient $a_n(F) = -\dfrac{a_n}{n^2}$ et $b_n(F) = -\dfrac{b_n}{n^2}$. Donc $a_n(f) = a_n$ et $b_n(f) = b_n$.

Partie III. Application à un problème variationnel

1.a) est clair et b) résulte de II.3 avec $a_n = 0$.

2. Posons $B(u,v) = \int_0^\pi [u'(x)v'(x)+u(x)v(x)]\,\mathrm{d}x$, $Q(v) = B(v,v)$ et $L(v) = \int_0^\pi f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$. L'application B est bilinéaire, Q est la forme quadratique associée et l'application L est linéaire. On développe par linéarité les expressions proposées.

3. Par la question 2, on obtient $J((1-t)u_1+tu_2) + t(1-t)Q(u_1-u_2) = J(u_1)$. Comme $(1-t)u_1+tu_2 \in E_0$, il vient, pour tout t réel on a $J((1-t)u_1+tu_2) \geqslant J(u_1)$. Prenant $t \in]0,1[$, il vient $Q(u_1-u_2) \leqslant 0$. Or Q est définie positive, donc $u_1 = u_2$.

4. a) On développe par bilinéarité.

b) Si u est un minimum de J alors pour tout $v \in E_0$, la fonction $t \mapsto J(u+tv)$ admet un minimum en 0, donc sa dérivée est nulle en 0. Il vient $\int_0^\pi (u'(x)v'(x) - u(x)v(x) - f(x)v(x))\,\mathrm{d}x = 0$.

Si inversement on a cette égalité, il vient pour tout $w \in E_0$, prenant $v = w-u$, $J(w) = J(u) + \dfrac{1}{2}Q(w-u) \geqslant J(u)$.

5. a) Par la question précédente, en prenant $v(x) = \sin(nx) \in E_0$, il vient

$$\frac{\pi}{2} b_n = \int_0^\pi f(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi u(x) \sin nx \,\mathrm{d}x - n \int_0^\pi u'(x) \cos nx \,\mathrm{d}x$$

Une intégration par parties donne $n \displaystyle\int_0^\pi u(x) \sin nx \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi u'(x) \cos nx \,\mathrm{d}x$

b) La fonction $\tilde{u}$ possède les propriétés suivantes

- $\tilde{u}$ est 2π périodique et $\tilde{u}(0) = \tilde{u}(\pi) = 0$
- $\tilde{u}$ est continue par convergence normale de la série la définissant (en effet $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$, donc b_n est bornée).
- par les résultats de la partie II.3, la fonction F définie par $F(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \sin nx}{n^2}$ est de classe C^2, avec $F''(x) = f(x)$.
- D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (ou en appliquant à nouveau II.3), la fonction G définie par $G(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n^2(n^2+1)} \sin nx \right)$ est de classe C^2, de dérivée seconde égale à $\tilde{u}$.

On a donc $\tilde{u} = G - F$, avec $G'' = -\tilde{u}$ et $F'' = f$. Ainsi, $\tilde{u}'' = \tilde{u} - f$.

c) La restriction de $\tilde{u}$ à l'intervalle $[0, \pi]$ est de classe C^2 et l'on a bien $u'' = u - f$ et $u(0) = u(\pi) = 0$..

d) Soit $v \in E_0$. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_0^\pi u'(x)v'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\pi u''(x)v(x)\mathrm{d}x$. Donc

$$\int_0^\pi (u'(x)v'(x) + \int_0^\pi (u(x) - f(x))v(x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi (u(x) - u''(x) - f(x))v(x)\mathrm{d}x = 0$$

Ainsi u est solution de (P) et donc un minimum de J.