Université Paris Diderot (Paris 7) *7 janvier 2012*
PRÉPARATION À L'AGRÉGATION INTERNE

Devoir N° 8

(Agrégation interne 2004 - 2ème épreuve de mathématiques)

Introduction et notations

Ce problème a pour objet l'étude de quelques propriétés des séries trigonométriques ; il se conclut par une application à la résolution d'un problème de DIRICHLET par une approche variationnelle (partie III).

Dans tout ce qui suit on note :
- $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues du segment $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$;
- E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$;

  Pour f appartenant à E on convient de désigner par f' la fonction définie sur $[0,\pi]$ par
  - si en x de $[0,\pi]$ f est dérivable, alors $f'(x)$ est le nombre dérivé de f en ce point ;
  - si en x de $[0,\pi]$ f n'est pas dérivable, alors $f'(x) = 0$;
- $\ell^2_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels telles que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ converge ;

  On rappelle que, si $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ et $\beta = (\beta_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux éléments de $\ell^2_{\mathbb{R}}$, la série de terme général $(\alpha_n\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est absolument convergente. De plus l'application $(\alpha,\beta) \mapsto \langle \alpha,\beta\rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\beta_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2_{\mathbb{R}}$ et $\ell^2_{\mathbb{R}}$ est complet pour la norme associée à ce produit scalaire ;
- pour tout entier $n \geqslant 1$, par e_n l'élément de E défini par $e_n(x) = \sin nx$.

Partie I : Questions préliminaires. Exemples

A. Un lemme de CANTOR

Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels. Pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, et on suppose que pour tout x réel la suite $(f_n(x))$ converge vers 0. On se propose de montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont pour limite 0 en $+\infty$.

1. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En déduire que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $b_n \sin nx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
2. Dans cette question, on propose deux méthodes pour montrer que la suite (b_n) a pour limite 0 en $+\infty$.
   a) *Raisonnement par l'absurde*
   On suppose que la suite (b_n) ne converge pas vers 0.
      i. Montrer qu'il existe un réel strictement positif ε et une sous suite (b_{n_k}) de la suite (b_n) tels que $n_1 > 0$ et que l'on ait, pour tout entier k, $|b_{n_k}| \geqslant \varepsilon$ et $n_{k+1} \geqslant 3n_k$.
      ii. Construire pour tout entier k un intervalle $[u_k, v_k]$ de la forme $u_k = \dfrac{\pi}{6} + p_k\pi$, $v_k = \dfrac{5\pi}{6} + p_k\pi$, avec $p_k \in \mathbb{Z}$, tel que si $J_k = \dfrac{1}{n_k}[u_k, v_k]$ l'on ait, pour tout entier k, $J_{k+1} \subset J_k$.
      iii. Établir que l'intersection $\displaystyle\bigcap_{k\geqslant 1} J_k$ n'est pas vide, et conclure à une contradiction.

   b) *Intervention du calcul intégral*
      i. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} (b_n \sin nx)^2 \,\mathrm{d}x$.
      ii. Conclure dans le cas où la suite (b_n) est bornée.
      iii. Dans le cas général, on pose $b'_n = \inf(1, |b_n|)$. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $b'_n \sin nx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Conclure.

B. L'espace H

1. a) Soient $\alpha = (\alpha_n)_{n\geqslant 1} \in \ell^2_{\mathbb{R}}$ et $x \in [0,\pi]$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{\alpha_n}{n}\, e_n(x)$ converge absolument (on pourra utiliser l'inégalité $ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ pour deux nombres réels a et b).

   b) On pose $\theta(\alpha)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n}\, e_n(x)$. Montrer que l'on définit ainsi une application θ de $\ell^2_{\mathbb{R}}$ dans $\mathcal{C}([0,\pi],\mathbb{R})$.

   c) Établir que θ est linéaire et injective.

Dans toute la suite on notera H l'image de θ et $\|\cdot\|_H$ la norme définie par $\|f\|_H = \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\right)^{1/2}$ pour $f=\theta(\alpha)$. L'espace H est complet pour cette norme (puisque θ est, par définition, isométrique).

2. a) Pour $(f,g)\in E\times E$ on pose $(f|g) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

   b) Établir l'inclusion $E\subset H$. (On pourra montrer que tout élément f de E est la restriction à $[0,\pi]$ d'une unique fonction 2π-périodique et impaire $\widetilde{f}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et développer $\widetilde{f}$ en série de FOURIER). Vérifier que la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ coïncide avec la restriction à E de $\|\cdot\|_H$.

   c) Montrer que E est dense dans H pour la topologie associée à la norme $\|\cdot\|_H$.

3. Pour f dans H, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$.

   a) Prouver l'existence d'une constante k telle que l'on ait l'inégalité, valable pour tout f de H :

$$(\star)\qquad \forall f\in H,\ \|f\|_\infty \leqslant k\|f\|_H.$$

   b) Pour $a\in]0,\pi[$, on désigne par h_a l'élément de E défini en tout x par

$$h_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} & \text{si } x\leqslant a \\[2mm] \dfrac{\pi-x}{\pi-a} & \text{si } x>a. \end{cases}$$

   En appliquant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ au produit scalaire $(f|h_a)$, pour f dans E, montrer que la plus petite valeur de k telle que l'on ait $(\star)$ est $\pi/\sqrt{8}$.

4. On se propose de démontrer que si F est une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $F(0)=0$, et si f est un élément de H, alors $F\circ f$ appartient à H.

   Soient f un élément de H et (f_n) une suite d'éléments de E convergeant vers f au sens de la norme $\|\cdot\|_H$. On pose $g_n = F\circ f_n$.

   a) Vérifier que la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée.

   On note A un réel vérifiant $\|f_n\|_\infty\leqslant A$ pour tout n, puis $M_1 = \sup\limits_{|t|\leqslant A}|F'(t)|$ et $M_2 = \sup\limits_{|t|\leqslant A}|F''(t)|$.

   b) Établir, pour tous p,q dans $\mathbb{N}$, l'inégalité :

$$\|g_p-g_q\|_H \leqslant \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[(f_q'(t)-f_p'(t))F'\circ f_q(t)]^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f_p'(t)(F'\circ f_q(t)-F'\circ f_p(t))]^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

   et en déduire que

$$\|g_p-g_q\|_H \leqslant \left(M_1 + \frac{\pi}{\sqrt{8}}M_2\|f_p\|_H\right)\|f_p-f_q\|_H.$$

   c) Conclure.

   d) En déduire que H est une algèbre, *i.e.* que le produit fg de deux éléments f et g de H est un élément de H. (On pourra utiliser la relation $4fg = (f+g)^2-(f-g)^2$).

Partie II : Pseudo-dérivée seconde au sens de Schwarz

Si f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que f admet au point x une dérivée seconde au sens de Schwarz si, et seulement si, $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$ existe ; dans ce cas la limite est notée $f^{('')}(x)$.

1. Montrer que si f est deux fois dérivable en $x \in \mathbb{R}$, alors $f^{('')}(x)$ existe et en donner la valeur.
2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant en tout $x \in \mathbb{R}$ une pseudo-dérivée seconde au sens de Schwarz nulle.
   a) Soient a et b des réels tels que $a < b$, ε un réel strictement positif. On pose

   $$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - \varepsilon(x-a)(b-x)$$

   Vérifier que la fonction φ est continue et que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Calculer $\varphi^{('')}$.
   Montrer que φ ne peut avoir de maximum en un point de $]a, b[$.

   b) En déduire que f est affine.
3. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de nombres réels telles que la série de fonctions de terme général $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On pose alors

   $$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

   a) Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}$ et prouver sa continuité.

   b) Pour x dans $\mathbb{R}$ et $h > 0$ on pose

   $$u(0) = 1,\ u(x) = \frac{4}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } \Delta(x,h) = \frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2}.$$

   Vérifier la relation $\Delta(x,h) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)u(nh)$.

   c) Si l'on pose $S_0(x) = 0$ et $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ pour $n \geqslant 1$, justifier l'égalité

   $$\Delta(x,h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[S_n(x) - f(x)][u(nh) - u((n+1)h)].$$

   d) Soit $x \in \mathbb{R}$ et notons $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ l'application définie par $g(s) = S_n(x) - f(x)$ pour $s \in [n, n+1[$.

      i. Démontrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} |u(nh) - u((n+1)h)| \leqslant \int_0^{Nh} |u'(t)|\,\mathrm{d}t$.

      ii. En remarquant que u' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, en déduire que, $F^{('')}(x)$ existe et vaut $f(x)$.

      iii. Montrer que l'application G qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ calculer G''.

      iv. Prouver finalement l'existence de réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait

      $$F(x) = \alpha x + \beta + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   e) Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont les coefficients de Fourier de f, *i.e.* que pour tout n :

   $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Partie III : Application à un problème variationnel

On désigne par E_0 le sous-espace vectoriel de E des applications v de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $v(0)=v(\pi)=0$.

On considère une application continue f de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in[0,\pi]$, on ait $\displaystyle f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ où $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de nombres réels.

1. a) Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série de terme général $(b_n\sin nx)_{n\geqslant 1}$ est convergente, et que sa somme coïncide avec l'unique application $\widetilde{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, impaire, 2π-périodique et prolongeant f.

   b) Justifier que, pour tout entier $n\geqslant 1$, on a $\displaystyle b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$.

2. *Le problème variationnel.* On désigne par $J : E_0\to\mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$\forall v\in E_0,\ \ J(v)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[(v'(x))^2+(v(x))^2]\,\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}f(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

   et on cherche à trouver un minimum de J, *i.e.* trouver $u\in E_0$ tel que, pour tout $v\in E_0$ on ait $J(u)\leqslant J(v)$.

   a) Établir, pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tous u,v de E_0, l'identité suivante :

$$J((1-t)u+tv)+\frac{t(1-t)}{2}\int_0^{\pi}[(v'(x)-u'(x))^2+(v(x)-u(x))^2]\,\mathrm{d}x=(1-t)J(u)+tJ(v).$$

   b) *Unicité du minimum.* Déduire de la question précédente que si J atteint son minimum en u_1 et u_2, alors : $\displaystyle\int_0^{\pi}[(u_1'(x)-u_2'(x))^2+(u_1(x)-u_2(x))^2]\,\mathrm{d}x=0$ et, par suite, $u_1=u_2$.

3. *Caractérisation du minimum de J*

   a) Montrer que pour tous u,v de E_0 et tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$J(u+tv)=J(u)+t\int_0^{\pi}(u'(x)v'(x)+u(x)v(x)-f(x)v(x))\,\mathrm{d}x+\frac{t^2}{2}\int_0^{\pi}(v'^2(x)+v^2(x))\,\mathrm{d}x.$$

   b) En déduire que, pour u dans E_0, u est un minimum J si, et seulement si, u vérifie :

$$(P)\qquad \forall v\in E_0,\ \int_0^{\pi}(u'(x)v'(x)+u(x)v(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}f(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. *Existence du minimum*

   a) Soit u un minimum de J. Déduire de la question précédente que nécessairement, pour tout entier $n\geqslant 1$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{b_n}{n^2+1}.$$

   b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on pose $\displaystyle\widetilde{u}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2+1}\sin nx$. En écrivant

$$\widetilde{u}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2}\sin nx-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^2(n^2+1)}\sin nx$$

   montrer que $\widetilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et vérifie :

$$\begin{cases}-\widetilde{u}''+\widetilde{u}=\widetilde{f}\\ \widetilde{u}(0)=\widetilde{u}(\pi)=0\end{cases}$$

   c) En déduire que la restriction u de $\widetilde{u}$ à $[0,\pi]$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\pi]$ et est solution, sur cet intervalle, du problème de Dirichlet :

$$(D)\qquad\begin{cases}-u''+u=f\\ u(0)=u(\pi)=0\end{cases}$$

   d) Montrer que u est solution de (P) et donc un minimum de J.