## 3.3 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

### 3.3.1 Applications linéaires continues

Comme un espace vectoriel normé est, comme on l'a vu muni d'une distance, toutes les notions de continuité, de limite *etc.* , y ont un sens.

**Proposition.** *Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé. Les applications $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans $E$ et $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{R} \times E$ dans $E$ sont continues.*

**Définition.** Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.

**Sous-espaces de Banach.** On appelle sous-espace de Banach d'un espace de Banach $E$ un sous-espace vectoriel fermé $F$ de $E$ (muni de la restriction à $F$ de la norme de $E$).

**Norme d'une application linéaire.** Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire. L'application $f$ est continue si et seulement si elle est continue en 0 ce qui a lieu si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ avec $\|f(x)\| \leqslant k\|x\|$ pour tout $x \in E$.
La meilleure constante dans cette inégalité, est le nombre $\sup\{\|f(x)\|;\ \ x \in E,\ \|x\| \leqslant 1\}$ qui s'appelle la *norme* de $f$ et se note $|||f|||$.
Pour $k \in \mathbb{R}_+$ on a $(\|f(x)\| \leqslant k\|x\| \text{ pour tout } x \in E) \iff (k \geqslant |||f|||)$.
Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires continues, alors $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||.|||f|||$.

**Proposition.** *Soient $E$ et $F$ des espaces vectoriels normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires continues de $E$ dans $F$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de $E$ dans $F$. L'application $|||\ |||$ est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Si $F$ est complet, il en va de même pour $\mathcal{L}(E, F)$.*

**Équivalence de normes** Soient $p$ et $q$ des normes sur un même espace vectoriel $E$. On dit que $p$ et $q$ sont *équivalentes* s'il existe $k, \ell \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $k\,p \leqslant q \leqslant \ell\,p$.

Remarquons que les distances associées à des normes équivalentes sont des distances équivalentes, donc uniformément équivalentes.

En particulier si $p$ et $q$ sont des normes équivalentes sur $E$, alors $(E, p)$ est un espace de Banach si et seulement si $(E, q)$ est un espace de Banach.

Remarquons aussi que contrairement au cas des espaces métriques généraux, il n'y a qu'une seule notion d'équivalence de distances : les distances associées à deux normes sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes.

### 3.3.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Présentons-les ici à nouveau rapidement.

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on dispose de plusieurs normes : pour $\xi = (x_1, \ldots, x_n)$ on pose
- $\|\xi\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots |x_n|)$
- $\|\xi\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$
- $\|\xi\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$.

Ces normes sont équivalentes : on a $\|\xi\|_\infty \leqslant \|\xi\|_2 \leqslant \|\xi\|_1 \leqslant n\|\xi\|_\infty$. Nous allons voir que toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Le point clef est que les boules et les sphères de l'espace vectoriel normé $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sont compactes.

**Lemme.** *Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\| \ \|_\infty$.*

*a) Toute application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est continue.*

*b) Toute application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel normé est un homéomorphisme.*

*Démonstration.* Notons $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soient $(E, N)$ un espace vectoriel normé et $\varphi : \mathbb{R}^n \to E$ une application linéaire.

a) Pour tout $\xi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\varphi(\xi) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\mathbf{e}_n),$$

donc

$$N\big(\varphi(\xi)\big) \leqslant |x_1| N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + |x_n| N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big) \leqslant \|\xi\|_\infty \Big(N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)\Big);$$

en d'autres termes, $\varphi$ est continue et l'on a $\|\varphi\| \leqslant N\big(\varphi(\mathbf{e}_1)\big) + \cdots + N\big(\varphi(\mathbf{e}_n)\big)$.

b) Supposons $\varphi$ bijective. Notons $S = \{\xi \in \mathbb{R}^n ; \|\xi\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. L'application $N \circ \varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est continue d'après (a). Comme $\varphi$ est injective et $N$ est une norme, pour tout $\xi \in S$, on a $N\big(\varphi(\xi)\big) > 0$. Comme $S$ est compact, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ qui minore $\{N \circ \varphi(\xi); \xi \in S\}$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ ; si $\xi$ n'est pas nul, posons $\eta = \|\xi\|_\infty^{-1}\xi$. Alors $\eta \in S$, donc $N\big(\varphi(\eta)\big) \geqslant a$ ; on en déduit que $N\big(\varphi(\xi)\big) \geqslant a\|\xi\|_\infty$. Cette dernière égalité étant aussi vraie si $\xi$ est nul, on en déduit que, pour tout $u \in E$, on a $N(u) = N\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(u)\big)\Big) \geqslant a\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty$, ou encore $\|\varphi^{-1}(u)\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{a}N(u)$. Donc $\varphi^{-1}$ est continue (et $\|\varphi^{-1}\| \leqslant a^{-1}$). □

**Théorème.** *Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie.*

*a) Toutes les normes sur $E$ sont équivalentes.*

*Munissons $E$ d'une norme.*

*b) Toute application linéaire de $E$ dans un espace vectoriel normé est continue.*

*Démonstration.* Choisissons une application linéaire bijective $\varphi$ de $\mathbb{R}^n$ sur $E$, où $n$ désigne la dimension de $E$.

a) Soient $N$ et $N'$ des normes sur $E$. Par le lemme ci-dessus, l'application $\varphi^{-1}$ est un homéomorphisme de $(E, N)$ sur $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ et l'application $\varphi$ est un homéomorphisme de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$ sur $(E, N')$. Leur composée, l'identité de $E$, est donc un homéomorphisme de $(E, N)$ sur $(E, N')$.

b) Soit $\psi$ une application linéaire de $E$ dans un espace vectoriel normé $F$. Par le lemme ci-dessus, l'application $\varphi^{-1}$ est un homéomorphisme de $E$ sur $\mathbb{R}^n$ et l'application $\psi \circ \varphi$ est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $F$. Leur composée $\psi$ est donc continue. □

Il résulte de ce théorème que pour tout espace vectoriel normé $E$ de dimension finie $n$, il existe un homéomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ sur $E$.

**Proposition.** *Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.*

**Corollaire.** *Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.*

Tout espace vectoriel normé de dimension finie $n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$. Il est donc localement compact. Le théorème suivant, dû à F. Riesz, apporte une réciproque à cet énoncé.

**Théorème de Riesz.** *Tout espace vectoriel normé localement compact est de dimension finie.*

*Démonstration.* Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé localement compact. Soit $V$ un voisinage compact de 0 dans $E$. Il existe alors $r > 0$ tel que $V$ contienne la boule fermée de centre 0 et de rayon $r$. Comme cette boule est fermée dans le compact $V$, elle est compacte. Comme la multiplication par $1/r$ est continue, la boule fermée $B$ de centre 0 et de rayon 1 est compacte.

Puisque les boules ouvertes de rayon 1/2 recouvrent le compact $B$, il existe une partie finie $J$ de $B$ telle que, pour tout $x \in B$, il existe $z \in J$ avec $N(x - z) < 1/2$.

Notons $F$ le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $J$. Comme $J$ est fini, la dimension de $F$ est finie. En particulier, par le corollaire ci-dessus, $F$ est fermé.

Nous allons montrer que $F = E$.

Soit $x \in E$. Notons $d = \inf\{N(x - y); y \in F\}$ la distance de $x$ à $F$. Montrons que $d = 0$ ; comme $F$ est fermé cela impliquera que l'on a $x \in F$.

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $kd < 1$ ; alors $\inf\{kN(x-y); y \in F\} < 1$ ; il existe donc $y \in F$ tel que $kN(x-y) < 1$ ; donc $k(x - y) \in B$. Il existe alors $z \in J$ tel que $N(k(x - y) - z) < 1/2$. Le vecteur $y' = y + k^{-1}z$ est un élément de $F$ et l'on a $kN(x - y') < 1/2$ ; on en déduit que $kd < 1/2$.

Cela montre que, pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$, si $kd < 1$ alors $kd < 1/2$. Cela n'est possible que si $d = 0$. $\square$

Le théorème de Riesz nous dit que dans un espace vectoriel normé de dimension infinie, les boules fermées de rayon non nul ne sont pas compactes. En particulier, en dimension infinie, *les fermés bornés ne sont pas toujours compacts.*

## 3.4 Exercices

**3.1 Exercice.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$, $f(s + t) \leqslant f(s) + f(t)$.

1. On suppose qu'il existe $s > 0$ tel que $f(s) = 0$. Montrer que $f$ est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que $f$ n'est pas nulle. Soit $(X, d)$ un espace métrique. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f\big(d(x, y)\big)$ est une distance sur $X$.
3. Vérifier que les applications suivantes satisfont les hypothèses faites sur $f$ :
   - $0 \mapsto 0$ et $t \mapsto 1$ si $t > 0$ ;
   - $t \mapsto t^\alpha$ avec $\alpha \in \,]0, 1[$ ;
   - $t \mapsto \min(t, 1)$ ;
   - $t \mapsto \dfrac{t}{t+1}$.
4. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante, continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $g(0) = 0$. On suppose que $g'$ est décroissante. Montrer que $g$ vérifie les hypothèses faites sur $f$.

**3.2 Exercice.** Soit $F$ une partie fermée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $F$ est non vide et majorée. Montrer que $\sup F \in F$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus F$. Montrer qu'il existe $a \in F \cup \{-\infty\}$ et $b \in F \cup \{+\infty\}$ tels que $a < x < b$ et $]a, b[ \subset \mathbb{R} \setminus F$.

   Soient $(E, N)$ un espace vectoriel normé et $f : F \to E$ une application continue.
3. Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to E$ qui prolonge $f$ et qui est affine sur tout intervalle $[a, b]$ tel que $]a, b[ \subset \mathbb{R} \setminus F$.
4. Montrer qu'une telle application $g$ est continue.

**3.17 Exercice.** Soient $E$ un espace vectoriel normé, $B$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 et $\ell$ une forme linéaire sur $E$. Montrer que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda \in \ell(B)$ et $|\mu| \leqslant 1$, on a $\lambda\mu \in \ell(B)$. En déduire que pour toute partie ouverte non vide $U$ de $E$ et toute forme linéaire $\ell$ non continue, on a $\ell(U) = \mathbb{C}$.

**3.18 Exercice.** Soient $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $p, q$ des normes sur $E$.

1. On suppose que $B_p(0,1) \subset \overline{B}_q(0,1)$. Montrer que $q \leqslant p$.
2. On suppose que $B_p(0,1) = B_q(0,1)$. Montrer que $p = q$.

**3.19 Exercice.** Notons $C^1([0,1];\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $C^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que les applications $p : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $q : f \mapsto |f(0)| + \|f'\|_\infty$ sont des normes équivalentes sur $C^1([0,1];\mathbb{C})$.
2. Les normes $p$ et $f \mapsto \|f\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
3. Montrer que $C^1([0,1];\mathbb{C})$ muni de la norme $q$ est un espace de Banach.

**3.20 Exercice.** Démontrer que dans un espace vectoriel normé
- l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon ;
- l'intérieur d'une boule fermée de rayon non nul est la boule ouverte de même rayon.

Ces deux énoncés sont faux dans le cas d'un espace métrique quelconque !

**3.21 Exercice.** Démontrer que, dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

**3.22 Exercice.** Soient $(E,p)$ et $(F,q)$ des espaces vectoriels normés et $f : E \to F$ une application linéaire de rang fini (ce qui signifie que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ de $F$ est de dimension finie). Démontrer que $f$ est continue si et seulement si son noyau est fermé.

**3.23 Exercice.**
1. Soient $E$ un espace vectoriel normé et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x,F) = \|x-y\|$. En déduira que, si $E \neq F$, pour tout $y \in F$ et tout $\lambda > 0$, il existe $x \in E$, tel que $d(x,F) = \|x-y\| = \lambda$.
2. Soient $E$ un espace de Banach et $(F_n)$ une suite strictement croissante de sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension finie.
   a) Construire une suite $(x_n)$ d'éléments de $E$ tels que $x_n \in F_n$, $d(x_{n+1}, F_n) = \|x_{n+1} - x_n\| = 3^{-n}$.
   b) Montrer que la suite $(x_n)$ converge dans $E$ et que sa limite $x$ vérifie $d(x, F_n) \geqslant \dfrac{3^{-n}}{2}$.
   c) En déduire que l'on a $E \neq \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.
3. Montrer qu'un espace de Banach n'admet pas de base (algébrique) infinie dénombrable.