

**Théorie des champs classiques et géométrie multisymplectique (9 ECTS)**

Frédéric Hélein

1<sup>er</sup> semestre**Présentation**

---

On propose une introduction au calcul des variations à une et plusieurs variables, au formalisme hamiltonien, avec des applications à la théorie des champs classiques, en privilégiant une approche géométrique, notamment via le formalisme multisymplectique.

**Programme**

---

**Chapitre 1 : calcul des variations à une variable**

- principe de Maupertuis, de Fermat, généralisations ;
- invariants intégraux, théorème de Noether ;
- formalisme hamiltonien, variétés symplectique ;
- crochet de Poisson ;
- espace des phases réduit de Lagrange-Souriau ;
- application à la quantification.

**Chapitre 2 : calcul des variations à plusieurs variables**

- premiers exemples d'actions issues de la physique : Klein-Gordon, Maxwell I ;
- espace de phase covariant ;
- théorème de Noether ;
- équations de Hamilton-Volterra.

**Chapitre 3 : modèles géométriques**

- rappels sur la géométrie riemannienne, les espaces fibrés, les connexions ;
- variétés multisymplectiques ;
- lien avec l'espace de phase covariant, le théorème de Noether ;
- action de Yang-Mills, d'Einstein-Hilbert.

**Connaissances requises**

---

Il sera utile de connaître les bases du calcul différentiel (notamment le calcul différentiel extérieur) et de géométrie (variétés riemanniennes, fibrés, connexions).

**Bibliographie**

---

- [1] T. De Donder, *Théorie Invariante du Calcul des Variations*, Gauthier-Villars, Paris, (1930).
- [2] J. Kijowski and W. Szczyrba, A canonical structure for classical field theories, *Commun. Math Phys.* 46 (1976).
- [3] M.J. Gotay, J. Isenberg and J.E. Marsden, (with the collaboration of R. Montgomery, J. Snyatycki, P.B. Yasskin) Momentum maps and classical relativistic fields, Part I : covariant field theory, arXiv : physics/9801019 ; Part II : Canonical Analysis of Field Theories (2004) arXiv : math-ph/0411032.
- [4] F. Hélein, Multisymplectic formalism and the covariant phase space. in *Variational Problems in Differential Geometry*, R. Bielawski, K. Houston, M. Speight, eds, London Mathematical Society Lecture Note Series 394, Cambridge University Press, (2012), arXiv :1106.2086.