

Calcul des variations à une et plusieurs variables et géométries symplectiques et multisymplectiques (9 ECTS)**Frédéric Hélein**

1er semestre

Présentation

On propose une introduction au calcul des variations à une et plusieurs variables, au formalisme hamiltonien, avec des applications à la théorie des champs classiques, en privilégiant une approche géométrique, notamment via le formalisme multisymplectique.

Programme

Chapitre 1 : calcul des variations à une variable

- *principe de Maupertuis, de Fermat, généralisations ;*
- *invariants intégraux, théorème de Noether ;*
- *formalisme hamiltonien, variétés symplectique ;*
- *crochet de Poisson ;*
- *espace des phases réduit de Lagrange-Souriau ;*
- *application à la quantification.*

Chapitre 2 : calcul des variations à plusieurs variables

- *premiers exemples d'actions issues de la physique : Klein-Gordon, Maxwell ;*
- *espace de phase covariant ;*
- *théorème de Noether ;*
- *équations de Hamilton-Volterra et variétés multisymplectiques.*

Connaissances requises

Il sera utile de connaître les bases du calcul différentiel (notamment le calcul différentiel extérieur) et de géométrie (variétés riemanniennes, fibrés, connexions).

Bibliographie

- [1] T. De Donder, *Théorie Invariante du Calcul des Variations*, Gauthier-Villars, Paris, (1930).
- [2] J. Kijowski and W. Szczyrba, A canonical structure for classical field theories, *Commun. Math Phys.* 46 (1976).
- [3] M.J. Gotay, J. Isenberg and J.E. Marsden, (with the collaboration of R. Montgomery, J. Snyatycki, P.B. Yasskin) Momentum maps and classical relativistic fields, Part I : covariant field theory, arXiv:physics/9801019 ; Part II : Canonical Analysis of Field Theories (2004) arXiv:math-ph/0411032.
- [4] F. Hélein, Multisymplectic formalism and the covariant phase space. in *Variational Problems in Differential Geometry*, R. Bielawski, K. Houston, M. Speight, eds, London Mathematical Society Lecture Note Series 394, Cambridge University Press, (2012), arXiv:1106.2086.