

**La théorie du corps de classes (9+9 ECTS)**

**Pierre-Henri Chaudouard**

1er semestre

**Présentation**

---

Le but du cours est d'énoncer les principaux résultats de la « théorie du corps de classes » et d'en donner une démonstration aussi complète que possible dans le temps imparti. Le but de cette théorie est d'obtenir une description des extensions abéliennes d'un corps local ou global en terme de l'arithmétique de ce corps. Le contenu du cours sera utile à tout étudiant intéressé par la théorie des nombres, la géométrie arithmétique ou les formes automorphes.

**Cours I.** (9 ECTS, septembre-octobre)

Le but du cours I est d'introduire les principaux objets qui vont intervenir dans l'énoncé et de démontrer au passage quelques théorèmes classiques de théorie algébrique des nombres. Il a donc un intérêt indépendamment du cours II.

**Programme**

---

- Valeurs absolues, complétions, corps locaux,
- Théorème d'Ostrowski, corps globaux, anneau des adèles,
- Compacité des classes d'adèles, dualité de Pontryagin, série de Fourier, formule sommatoire de Poisson,
- Idèles d'un corps global, compacité des classes d'idèles. Applications : finitude du groupe de classes, théorème des unités,
- Thèse de Tate.

**Connaissances requises**

---

Une familiarité avec l'algèbre commutative de base (anneaux, idéaux, modules, corps, localisation, quotients, anneaux de Dedekind). Quelques notions de théorie de Galois sont les bienvenues. On utilisera des notions élémentaires d'analyse complexe et d'analyse de Fourier.

**Bibliographie**

---

- [1] J. Cassels -J.Fröhlich, Algebraic number theory
- [2] S. Lang, Algebraic number theory
- [3] D. Ramakrishnan, R. Valenza Fourier Analysis on Number Fields
- [4] J-P Serre Corps locaux
- [5] A. Weil Basic Number theory

**Cours II.** (9 ECTS, novembre-décembre)

**Programme**

---

- Notions de cohomologie des groupes,
- La première inégalité fondamentale ; conséquences,
- La seconde inégalité fondamentale ; conséquences,
- Loi de réciprocité d'Artin ; énoncé, preuve,
- Le théorème d'existence,
- Applications (corps de classes de Hilbert, théorème de Kronecker-Weber ...).

**Connaissances requises**

---

Cours I + prérequis du cours I.

**Bibliographie**

---

- [1] E. Artin. J. Tate Class field theory
- [2] J. Cassels -J.Fröhlich, Algebraic number theory
- [3] S. Lang, Algebraic number theory
- [4] J. Milne Class field theory
- [5] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg Cohomology of Number fields
- [6] D. Ramakrishnan, R. Valenza Fourier Analysis on Number Fields
- [7] J-P Serre Corps locaux
- [8] A. Weil Basic Number theory