

**Combinatoire (9+9 ECTS)**

**Guillaume Chapuy**

1<sup>er</sup> semestre

**Présentation**

---

Ce cours a pour but de présenter une introduction générale à la combinatoire, et à la combinatoire énumérative en particulier. La plupart des étudiants n'ayant eu qu'un contact très bref voire nul avec la combinatoire, nous commencerons par les bases : arguments de double comptage, démonstrations bijectives d'identités combinatoires, techniques de résolutions d'équations de récurrence à base de séries génératrices, méthodes d'inclusion-exclusion. En nous concentrant sur les objets classiques de la combinatoire (arbres, mots chemins, tableaux), nous développerons néanmoins des méthodes générales qui ensemble forment la combinatoire énumérative : combinatoire symbolique, combinatoire analytique, combinatoire des chemins et des langages algébriques et rationnels, tout en abordant des techniques plus avancées. Nous aborderons également la théorie des fonctions symétriques et ses liens avec les tableaux de Young et la théorie des représentations du groupe symétrique, en proposant des applications à la résolution de problèmes de comptage pour des nombres de Hurwitz, ainsi que pour des modèles de physique statistique comme les matrices à signes alternants via les équations de Yang-Baxter. Certains des développements suggérés dans le plan pourront être donnés sous forme de travail personnel aux étudiant.e.s motivé.e.s.

Le cours sera constitué de deux modules consécutifs de 24 heures destinés à être suivis ensemble.

**Programme**

---

- Concepts de base, coefficients binomiaux, principes d'énumération élémentaires.
- Séries formelles, combinatoire symbolique. Langages réguliers, séries rationnelles et algébriques.
- Combinatoire des chemins, inversion de la Lagrange, lemme cyclique.
- Encore des fonctions génératrices : partitions, q-séries, quelques mots sur les séries hypergéométriques.
- Méthodes de crible. Inclusion-Inclusion et applications. Combinatoire déterminantale, lemme de Gessel-Viennot, théorème matrix-tree.
- Jardin de Catalan, arbres et bijection classiques.
- Introduction aux fonctions symétriques, algorithme RSK, opérateurs de vertex et espace de Fock, application aux modèles de pavages. Tableaux standard et formule des équerres.
- Rappels de théorie des représentations des groupes finis. Formule de Frobenius et application à l'énumération de graphes plongés.
- Équation de Yang-Baxter et matrices à signes alternants.

**Bibliographie**

---

- [1] Martin Aigner, A Course in Enumeration, Berlin : Springer, c2007.
- [2] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick, Analytic combinatorics, Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 2009.
- [3] Richard Stanley, Enumerative Combinatorics, Volume 2, New York : Cambridge University Press, 2012.