Feuille d'exercices n°2

Anneaux.

Exercice 1. Montrer qu'un anneau intègre fini est un corps.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble des nombres décimaux est un anneau principal.
Indication : Les décimaux ont une écriture unique de la forme $2^\alpha 5^\beta a$ où $\alpha, \beta, a \in \mathbb{Z}$ et a est premier avec 10. Pour un idéal fixé I, montrer que $N = \{a \in \mathbb{Z} | \exists \alpha \in \mathbb{Z}, \exists \beta \in \mathbb{Z}, 2^\alpha 5^\beta a \in I\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et conclure.

Exercice 3 (Entiers de Gauss). On considère l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Soit la fonction $N : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ définie par $N(a + ib) = a^2 + b^2$. Montrer que N est multiplicative et que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien relativement à N.
2. Déterminer l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
3. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
4. Chercher pour les premières valeurs des nombres premiers $2, 3, 5, 7, \ldots$ (considérés comme des entiers de Gauss) les éléments irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$. Que constate-t-on ?
5. Donner un PGCD de $7 + 3i$ et $2 - i$? Même question pour $9 - i$ et $5 - 11i$.

Exercice 4 (Entiers de Gauss et théorème des deux carrés). On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. Soit p un nombre premier. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) p n'est pas irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$,
   (b) Il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $p = N(z)$,
   (b') Il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$ (p est somme de deux carrés),
   (c) -1 est un résidu quadratique modulo p.
   Indication : Pour $(c) \Rightarrow (a)$, supposer que $-1 \equiv x^2 \pmod{p}$. On a alors $p / x^2 + 1$. Décomposer $x^2 + 1$ et en déduire que p ne peut pas être irréductible.
2. En déduire, en utilisant l'exercice 9 de la feuille d'exercices 1, le résultat suivant :
   Théorème : Soit p un nombre premier.
   Alors p est somme de deux carrés si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Exercice 5 (Un anneau non factoriel). Soit $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a + bi\sqrt{5}, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que l'application $N : A \to \mathbb{N}$ définie par $N(a + bi\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$ est multiplicative.
3. Montrer que les éléments inversibles de A sont les $z \in A$ tels que $N(z) = 1$. En déduire l'ensemble des éléments inversibles.
4. Montrer que les éléments 2,3, $1 + i\sqrt{5}$, $1 - i\sqrt{5}$ sont irréductibles dans A. En déduire que A n'est pas factoriel.