

Fonctions d'une variable réelle : Exercices

6.4 Exercice. *Théorème de Weierstraß.* Pour $f \in C([0, 1]; \mathbb{K})$, et $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n(f)$ la fonction polynomiale $x \mapsto \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$, où les $\binom{n}{k}$ sont les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

1. Calculer la fonction $B_n(f)$ dans les trois cas suivants :

a) f est constante ;

b) $f(x) = x$ - on utilisera la formule $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$;

c) $f(x) = x(1-x)$ - on utilisera la formule $\frac{k(n-k)}{n(n-1)} \binom{n}{k} = \binom{n-2}{k-1}$.

2. On suppose que $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des constantes. Montrer que pour $n \geq 1$, on a $(B_n(f) - f)(x) = ax(1-x)/n$.

3. Soient $f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x, y \in [0, 1]$, on ait $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + K(x-y)^2$.

4. On fixe f, ε et K comme dans (??). Soit $y \in [0, 1]$. Notons g_y et h_y les fonctions $x \mapsto f(y) - \varepsilon - K(x-y)^2$ et $x \mapsto f(y) + \varepsilon + K(x-y)^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(g_y) \leq B_n(f) \leq B_n(h_y)$. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $|f(y) - B_n(f)(y)| \leq \varepsilon + Ky(1-y)/n$.

5. Montrer que pour tout $f \in C([0, 1]; \mathbb{K})$, la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))$ converge uniformément vers f .

6.12 Exercice. *Théorème de Bernstein.* Soient $a > 0$ et $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ . On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]-a, a[$, on a $f^{(2k)}(x) \geq 0$.

1. Pour $x \in]-a, a[$, posons $F(x) = f(x) + f(-x)$; pour $n \in \mathbb{N}$, notons R_{2n+1} le reste de la série de Taylor de F : $R_{2n+1}(x) = F(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} F^{(2k)}(0)$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in]-a, a[$, on a $0 \leq R_{2n+1}(x) \leq F(x)$.

b) Soient $t, x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 < t < x < y < a$. Démontrer que l'on a $\frac{x-t}{y-t} \leq \frac{x}{y}$.

c) Établir l'inégalité $R_{2n+1}(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{2n+1} R_{2n+1}(y)$ à l'aide d'une formule de Taylor avec reste intégrale. En déduire que l'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1}(x) = 0$ et que F est développable en série entière (en 0) sur $]-a, a[$.

2. Pour $x \in]-a, a[$ et $n \in \mathbb{N}$ posons $r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$. Soit $x \in]-a, a[$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $r_{2n+1}(x) \geq 0$ et $r_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(-x) = R_{2n+1}(x)$.

b) Démontrer que $\frac{x^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(0)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c) En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ et que f est développable en série entière (en 0) sur $]-a, a[$;

3. Applications. Démontrer que les applications suivantes sont développables en série entière en 0 :
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $] -1, 1[$.
 - $x \mapsto \tan x$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

7.20 Exercice. *Indice de réfraction.*

- Dans plan euclidien P , on se donne une droite D et deux points A, B situés de part et d'autre de D . On veut trouver le chemin le plus rapide pour aller de A à B sachant que dans le demi-plan de A on se déplace avec une vitesse v (dans toutes les directions) et dans le demi-plan de B avec une vitesse w . Le trajet effectué consiste en deux segments AM et MB . Comment choisir M pour que le temps de trajet soit minimal ?
- On se pose le même problème avec deux points de l'espace situés de part et d'autre d'un plan.

7.28 Exercice. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Soit $a \in I$.

- On suppose que f est deux fois dérivable en a . Calculer la limite en 0 de l'application $t \mapsto \frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t^2}$.
- On suppose que f est deux fois dérivable sur I . Soit $t \in \mathbb{R}^*$ tel que $a-t \in I$ et $a+t \in I$. Démontrer qu'il existe $c \in]a-t, a+t[$ tel que $\frac{f(a+t) + f(a-t) - 2f(a)}{t^2} = f''(c)$.

7.29 Exercice. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1} et $a \in \mathbb{R}$. Pour $h \in \mathbb{R}$, on écrit la formule de Taylor-Lagrange

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a + \theta_h h).$$

On suppose en outre que $f^{(n+1)}(a) \neq 0$. Démontrer que, pour h non nul et assez petit, θ_h est uniquement défini, et que $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$.