

Devoir N° 2

(Agrégation interne 2007 - 2ème épreuve de mathématiques)

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante dérivable $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R}; H'(x) = 0\}$ soit dense dans \mathbb{R} . Nous étudions ensuite cet ensemble A .

Nous construisons en fait la fonction réciproque F de H .

Dans tout le problème, on désigne par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I. La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé. Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $a \in I$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en a . On dira que g est dérivable au sens généralisé en a lorsque $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque x tend vers a ($x \neq a$). Dans ce cas, on écrit encore $g'(a) = \ell$.

1. Soient I, J des intervalles ouverts de \mathbb{R} et $g : I \rightarrow J$ une bijection croissante. On suppose que g est dérivable au sens généralisé en tout point de I . Démontrer que la fonction réciproque g^{-1} de g est dérivable au sens généralisé en tout point de J et que, pour tout $a \in J$ on a $(g^{-1})'(a) = \frac{1}{g'(g^{-1}(a))}$ si $g'(g^{-1}(a)) \in \mathbb{R}_+^*$, $(g^{-1})'(a) = +\infty$ si $g'(g^{-1}(a)) = 0$ et $(g^{-1})'(g^{-1}(a)) = 0$ si $g'(g^{-1}(a)) = +\infty$.
2. Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $a \in I$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.
 - (a) Soit $c \in I$. On suppose que g dérivable au sens généralisé en c et admet un maximum local en c . Démontrer que $g'(c) = 0$.
 - (b) On suppose que g est dérivable au sens généralisé en tout point de I et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$ (on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$.)
3. Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $a \in I$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que g est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque x tend vers a .

- (a) Soit $x \in I$, $x \neq a$. Notons $J_x =]a, x[$ si $x > a$ et $J_x =]x, a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a

$$\inf\{g'(y), y \in J_x\} \leq \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leq \sup\{g'(y), y \in J_x\}.$$

- (b) Démontrer que g est dérivable au sens généralisé en a et que $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

1. (a) Démontrer que la fonction f (définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) est dérivable au sens généralisé sur \mathbb{R} et que $f'(0) = +\infty$.
- (b) Soient $s, t \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que l'on a $f'(s) \leq f'(t) \iff |s| \geq |t|$.
- (c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x+a) - f(x-a)$ atteint son maximum en 0.
- (d) Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leq 2 \left| f\left(\frac{x-y}{2}\right) \right|$.

- (e) Démontrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .
2. (a) Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $x^2 + xy + y^2 \geq \frac{3}{4}x^2$.
- (b) En déduire que, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$, on a

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 4f'(x_0).$$

C. Construction d'une suite dense. Notons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t \cos t$. Rappelons qu'on désigne par $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé sur \mathbb{R} . Étudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.
- (b) Démontrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} (g \circ f)'(t) = 0$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = g(f(n)) = n^{1/3} \cos(n^{1/3})$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\pi \geq |x|$.
- (a) Démontrer qu'il existe un nombre $y(k, x) \in [k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k, x)) = x$.
- (b) Notons n_k la partie entière de $y(k, x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x .
3. Démontrer que $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. Démontrer que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ convergent.

II. Construction de la fonction F

1. **Construction.** On se donne une suite (a_n) de nombres réels et une suite (λ_n) de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ convergent.
- (a) Démontrer que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{R} .
- On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$.
- (b) Démontrer que F est continue et strictement croissante.
- (c) Démontrer que, pour tout $x > a_0$, on a $F(x) - F(a_0) \geq \lambda_0 f(x - a_0)$ et, que pour tout $x < a_0$, on a $F(x) - F(a_0) \leq \lambda_0 f(x - a_0)$.
- (d) En déduire les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$.
- (e) Démontrer que F est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Dérivabilité. Nous allons démontrer que la fonction F construite ci-dessus est dérivable au sens généralisé sur \mathbb{R} (avec $F'(x) \in]0, +\infty[$).

2. Démontrer que pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Démontrer que F est dérivable au sens généralisé en a_n et $F'(a_n) = +\infty$.

4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'est pas égal à un a_n , mais que la série de terme général $(\lambda_n f'(x_0 - a_n))$ est divergente.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors

$$1 + \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geq \sum_{k=0}^n \lambda_k f'(x - a_k).$$

(b) En déduire que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et $F'(x_0) = +\infty$.

5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'est pas égal à un a_n et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente.

(a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$

(b) En déduire que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.

6. Démontrer que la fonction réciproque F^{-1} de F est dérivable en tout point de \mathbb{R} .

III. Parties denses de \mathbb{R}

A. Intersections d'ouverts denses. Donnons-nous pour tout $n \in \mathbb{N}$ un sous-ensemble ouvert

$V_n \subset \mathbb{R}$ dense dans \mathbb{R} . Posons $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} V_n$.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide.

(a) Démontrer qu'il existe des suites u_n et v_n de nombres réels satisfaisant les conditions suivantes :

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$;

ii. $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$;

iii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap V_{n+1}$.

(b) Démontrer que $I \cap B \neq \emptyset$.

2. Démontrer que B est dense dans \mathbb{R} .

3. Soit (x_n) une suite de points de B . En considérant les ouverts $V_n \setminus \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $B \setminus \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

B. Parties contenant des « gros compacts »

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a, b]$. On suppose que le sous-ensemble $C = \{b_k; k \in \mathbb{N}\}$ de \mathbb{R} est compact. Soient $\varepsilon > 0$ et $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \leq \varepsilon$.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $I_k =]b_k - \alpha_k, b_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$C \subset \bigcup_{k=0}^n I_k.$$

- (b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ telle que l'on ait
- $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$;
 - $g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup_{k=0}^n I_k$.

Démontrer que $\int_a^b g(t) dt \leq \varepsilon$.

2. Soit A une partie de \mathbb{R} . On suppose que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, il existe une partie compacte $C \subset A \cap [a, b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on ait $\int_a^b g(t) dt \geq \varepsilon$.
- (a) Démontrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'ensemble $[a, b] \cap A$ n'est pas dénombrable.
- (b) Démontrer que A est dense dans \mathbb{R} et que pour toute partie dénombrable D de A , l'ensemble $A \setminus D$ est encore dense dans \mathbb{R} .

IV. Les points de pente infinie

On reprend les notations du II : on se donne une suite (a_n) de nombres réels et une suite (λ_n) de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ convergent, et l'on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. On suppose de plus que l'ensemble $D = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

A. Densité des points de pente infinie.

1. Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $g_T(x) = \inf\{T, f'(x)\}$.
- (a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n)$ converge et que la fonction
- $$G_T : x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n)$$
- est continue.
- (b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = \sup\{G_T(x); T \in \mathbb{R}_+\}$.
2. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $U_M = \{x \in \mathbb{R}; F'(x) > M\}$.
- (a) Démontrer que U_M est réunion des ensembles $\{x \in \mathbb{R}; G_T(x) > M\}$ pour $T \in \mathbb{R}_+$.
- (b) Démontrer que U_M est une partie ouverte et dense de \mathbb{R} .
3. Démontrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}; F'(x) = +\infty\} \setminus D$ est dense dans \mathbb{R} .

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.

1. Soient $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon > 0$ et $a + \varepsilon < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $C = \{x \in [a, b]; x \notin U_M\}$. Soit $g : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue telle que $g(t) = 1$ pour tout $x \in C$. Démontrer que
- $$\int_a^b M g(t) dt + F(b) - F(a) \geq M(b - a).$$
2. Démontrer que, pour toute partie dénombrable $N \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \setminus N; F'(a) \neq +\infty\}$ est dense dans \mathbb{R} .