Université Paris Diderot *Samedi 30 septembre 2017*

Devoir N$^{\text{o}}$ 2

(Agrégation interne 2007 - 2ème épreuve de mathématiques)

Le but de ce problème est de construire une fonction strictement croissante dérivable $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R};\ H'(x) = 0\}$ soit dense dans $\mathbb{R}$. Nous étudions ensuite cet ensemble A.

Nous construisons en fait la fonction réciproque F de H.

Dans tout le problème, on désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I. La fonction racine cubique

A. Dérivées au sens généralisé. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dira que g est dérivable au sens généralisé en a si elle est continue en a et $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque x tend vers a ($x \neq a$). Dans ce cas, on écrit encore $g'(a) = \ell$.

1. Soient I, J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et $g : I \to J$ une bijection croissante. On suppose que g est dérivable au sens généralisé en tout point de I. Démontrer que la fonction réciproque g^{-1} de g est dérivable au sens généralisé en tout point de J et que, pour tout $a \in J$ on a $(g^{-1})'(a) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(a))}$ si $g'(g^{-1}(a)) \in \mathbb{R}_+^*$, $(g^{-1})'(a) = +\infty$ si $g'(g^{-1}(a)) = 0$ et $(g^{-1})'(g^{-1}(a)) = 0$ si $g'(g^{-1}(a)) = +\infty$.
2. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Soit $c \in I$. On suppose que g dérivable au sens généralisé en c et admet un maximum local en c. Démontrer que $g'(c) = 0$.
   (b) On suppose que g est dérivable au sens généralisé en tout point de I et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Démontrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$ (on pourra examiner dans un premier temps le cas où $g(a) = g(b)$.)
3. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que g est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que la fonction $x \mapsto g'(x)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ lorsque x tend vers a.
   (a) Soit $x \in I$, $x \neq a$. Notons $J_x =]a, x[$ si $x > a$ et $J_x =]x, a[$ si $x < a$. Démontrer que l'on a
   $$\inf\{g'(y),\ y \in J_x\} \leqslant \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \leqslant \sup\{g'(y),\ y \in J_x\}.$$
   (b) Démontrer que g est dérivable au sens généralisé en a et que $g'(a) = \ell$.

B. La fonction racine cubique

1. (a) Démontrer que la fonction f (définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) est dérivable au sens généralisé sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = +\infty$.
   (b) Soient $s, t \in \mathbb{R}^*$. Démontrer que l'on a $f'(s) \leqslant f'(t) \iff |s| \geqslant |t|$.
   (c) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x + a) - f(x - a)$ atteint son maximum en 0.

(d) Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant 2\left|f\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|$.

(e) Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Démontrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$, on a $x^2 + xy + y^2 \geqslant \frac{3}{4}x^2$.

(b) En déduire que, pour $x_0, x \in \mathbb{R}$ tels que $x_0 \neq 0$ et $x \neq x_0$, on a

$$0 \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 4f'(x_0).$$

C. Construction d'une suite dense. Notons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t\cos t$. Rappelons qu'on désigne par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)^3 = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Démontrer que la fonction $g \circ f$ est dérivable au sens généralisé sur $\mathbb{R}$. Éudier en particulier $(g \circ f)'(0)$.

(b) Démontrer que $\lim_{t \to \infty} (g \circ f)'(t) = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = g(f(n)) = n^{1/3}\cos(n^{1/3})$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k\pi \geqslant |x|$.

(a) Démontrer qu'il existe un nombre $y(k, x) \in [k\pi, (k+1)\pi[$ tel que $g(y(k, x)) = x$.

(b) Notons n_k la partie entière de $y(k, x)^3$. Démontrer que la suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

3. Démontrer que $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\lambda_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. Démontrer que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ convergent.

II. Construction de la fonction F

1. ***Construction.*** On se donne une suite (a_n) de nombres réels et une suite (λ_n) de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ convergent.

(a) Démontrer que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \lambda_n f(x - a_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}$.

On pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$.

(b) Démontrer que F est continue et strictement croissante.

(c) Démontrer que, pour tout $x > a_0$, on a $F(x) - F(a_0) \geqslant \lambda_0 f(x - a_0)$ et, que pour tout $x < a_0$, on a $F(x) - F(a_0) \leqslant \lambda_0 f(x - a_0)$.

(d) En déduire les limites de F en $+\infty$ et en $-\infty$.

(e) Démontrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité. Nous allons démontrer que la fonction F construite ci-dessus est dérivable au sens généralisé sur $\mathbb{R}$ (avec $F'(x) \in]0, +\infty]$) .

2. Démontrer que pour $x, x_0 \in \mathbb{R}$ tels que $x \neq x_0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Démontrer que F est dérivable au sens généralisé en a_n et $F'(a_n) = +\infty$.
4. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'est pas égal à un a_n, mais que la série de terme général $(\lambda_n f'(x_0 - a_n))$ est divergente.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, alors $1 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.
   (b) En déduire que F est dérivable au sens généralisé en x_0 et $F'(x_0) = +\infty$.
5. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que x_0 n'est pas égal à un a_n et que la série de terme général $\lambda_n f'(x_0 - a_n)$ est convergente.
   (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq x_0$, on a
   $$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \frac{f(x - a_k) - f(x_0 - a_k)}{x - x_0} + 4 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k).$$
   (b) En déduire que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k f'(x_0 - a_k)$.
6. Démontrer que la fonction réciproque F^{-1} de F est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

III. Parties denses de $\mathbb{R}$

A. Intersections d'ouverts denses. Donnons-nous pour tout $n \in \mathbb{N}$ un sous-ensemble ouvert $V_n \subset \mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$. Posons $B = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} V_n$.

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide.
   (a) Démontrer qu'il existe des suites u_n et v_n de nombres réels satisfaisant les conditions suivantes :
      i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$;
      ii. $[u_0, v_0] \subset I \cap V_0$;
      iii. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[u_{n+1}, v_{n+1}] \subset]u_n, v_n[\cap V_{n+1}$.
   (b) Démontrer que $I \cap B \neq \emptyset$.
2. Démontrer que B est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Soit (x_n) une suite de points de B. En considérant les ouverts $V_n \setminus \{x_n\}$, démontrer que l'ensemble $B \setminus \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

B. Parties contenant des «gros compacts»

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de l'intervalle $[a, b]$. On suppose que le sous-ensemble $C = \{b_k;\ n \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}$ est compact. Soient $\varepsilon > 0$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $2 \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \leqslant \varepsilon$.

(a) Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $I_k =]b_k - \alpha_k, b_k + \alpha_k[$. Démontrer qu'il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que $C \subset \bigcup_{k=0}^{n} I_k$.

(b) Démontrer qu'il existe une fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ telle que l'on ait
- $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$;
- $g(x) = 0$ pour tout $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} I_k$.

Démontrer que $\int_a^b g(t)\,dt \leqslant \varepsilon$.

2. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que et $a < b$, il existe une partie compacte $C \subset A \cap [a,b]$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute fonction continue $g : [a,b] \to [0,1]$ satisfaisant $g(x) = 1$ pour tout $x \in C$ on ait $\int_a^b g(t)\,dt \geqslant \varepsilon$.

(a) Démontrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, l'ensemble $[a,b] \cap A$ n'est pas dénombrable.

(b) Démontrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ et que pour toute partie dénombrable D de A, l'ensemble $A \setminus D$ est encore dense dans $\mathbb{R}$.

IV. Les points de pente infinie

On reprend les notations du II : on se donne une suite (a_n) de nombres réels et une suite (λ_n) de nombres réels strictement positifs. On suppose que les séries de terme général λ_n et $\lambda_n f(a_n)$ convergent, et l'on pose $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f(x - a_n)$. On suppose de plus que l'ensemble $D = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

A. Densité des points de pente infinie.

1. Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $g_T(x) = \inf\{T, f'(x)\}$.

(a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n)$ converge et que la fonction $G_T : x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n g_T(x - a_n)$ est continue.

(b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) = \sup\{G_T(x);\ T \in \mathbb{R}_+\}$.

2. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $U_M = \{x \in \mathbb{R};\ F'(x) > M\}$.

(a) Démontrer que U_M est réunion des ensembles $\{x \in \mathbb{R};\ G_T(x) > M\}$ pour $T \in \mathbb{R}_+$.

(b) Démontrer que U_M est une partie ouverte et dense de $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ F'(x) = +\infty\} \setminus D$ est dense dans $\mathbb{R}$.

B. Densité de l'ensemble des points de pente finie.

1. Soient $a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\varepsilon > 0$ et $a + \varepsilon < b$. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $C = \{x \in [a,b];\ x \notin U_M\}$. Soit $g : [a,b] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $g(t) = 1$ pour tout $x \in C$. Démontrer que $\int_a^b M g(t)\,dt + F(b) - F(a) \geqslant M(b-a)$.

2. Démontrer que, pour toute partie dénombrable $N \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $\{a \in \mathbb{R} \setminus N;\ F'(a) \neq +\infty\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.