Master 1
Mention mathématique et informatique
UFR de Mathématiques
Université Paris-Diderot

Parcours mathématiques fondamentales
Parcours modélisation aléatoire
Parcours logique mathématique et fondements de l'informatique

Année 2013-2014

Secrétariat du Master 1
Christian Sénécal
Bâtiment Sophie Germain
tél : (33) (0)1 57 27 65 37/40
Fax : (33) (0)1 57 27 65 41
http ://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/index

Responsables pédagogiques

- parcours Mathématiques fondamentales et parcours logique mathématique et fondements de l'informatique :

  Loïc Merel

  merel@math.jussieu.fr
- parcours modélisation aléatoire :

  Dominique Picard :

  picard@math.univ-paris-diderot.fr

Responsable de la scolarité, bureau d'accueil des étudiants

Christian Sénécal
Bâtiment Sophie Germain
tél : (33) (0)1 57 27 65 37

Horaires d'ouverture

- Lundi et jeudi : 9h-12h et 13h30 :17h
- Mardi et vendredi : 9h-16h
- Mercredi : 9h-12h

Conditions d'accès

L'accès en MASTER 1ère année est ouvert
- aux étudiant(e)s d'une université ou d'une école française, titulaires d'un diplôme de niveau Licence à dominante mathématique,
- aux étudiant(e)s d'une université étrangère, titulaires d'un diplôme équivalent.
- aux étudiant(e)s ayant obtenu une dispense de la licence de mathématiques

Dérogations Toute demande de dérogation doit être déposée au secrétariat du M1 lors de l'inscription pédagogique.

Organisation du master

Le Master présente deux aspects complémentaires : il vise d'une part à la consolidation de vos connaissances générales de mathématiques, acquises au niveau de la licence ; d'autre part, il propose en 1ère année un début de spécialisation. La spécialisation s'effectue complètement en 2ème année.

Une spécialité peut elle-même présenter plusieurs parcours. Les parcours sont constitués d'un ensemble cohérent d'unités d'enseignement permettant à l'étudiant d'acquérir des compétences dans un domaine donné.

La spécialité mathématique propose trois parcours :

1. Mathématiques fondamentales.
2. Modélisation aléatoire (mathématiques appliquées)
3. Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique.

Conseils pour le choix des parcours

Il est essentiel de comprendre que les choix de M1 ne conditionnent pas forcément la suite du cursus.
Toutefois une orientation importante intervient à la fin de la première année de Master, avec le choix du M2. Ce choix est partiellement déterminé par le parcours choisi en début d'année. Il est donc très important pour l'étudiant de préciser aussitôt que possible son orientation en vue de la deuxième année.

Voici quelques indications :

- le M2 Mathématiques fondamentales est lié au parcours Mathématiques fondamentales en M1 mais rien n'interdit de choisir des cours de mathématiques appliquées.

- le M2 Modélisation aléatoire est lié au parcours Modélisation aléatoire ou Mathématiques fondamentales mais alors il est utile de valider le cours de Probabilités I, le cours de statistique fondamentale (deuxième semestre), un cours d'analyse du premier semestre (analyse réelle ou analyse fonctionnelle) et de ne pas négligez l'informatique.

- Pour le M2 de Logique Mathématique il est indiqué de choisir le parcours Mathématiques fondamentales ou Logique Mathématique, mais de valider l'UE d'Algèbre et les UE de Logique.

- Pour le M2 Mathématiques générales qui prépare à l'agrégation, il est recommandé de choisir le parcours mathématiques fondamentales ou le parcours modélisation aléatoire.

- les M2 MIC et M2 ISIFAR possèdent chacun une première année propre mais peuvent accepter dans certains cas des étudiants provenant du M1 de mathématiques : contacter les responsables à ce sujet.

Les responsables des M1 et M2 sont à l'écoute des étudiants et de leurs questions concernant leur orientation. Une réunion de présentation du M1 a lieu avant le début des cours. Une réunion de présentation des M2 est prévue avant les cours du second semestre.

Formalités

Inscription pédagogique L'inscription pédagogique est obligatoire. Si l'étudiant(e) n'est pas incrit(e) à un enseignement, il (elle) ne peut pas passer l'examen.
Pour l'inscription pédagogique au premier semestre, l'étudiant(e) devra se munir de sa carte d'étudiant, et se rendre au secrétariat de la scolarité.
L'inscription pédagogique aux enseignements du deuxième semestre se fera après l'affichage des résultats des examens du premier semestre.

Contrôle des connaissances et examens

Inscription aux examens Pour être inscrit(e) aux examens, un(e) étudiant(e) doit remplir obligatoirement les conditions suivantes :

- être inscrit(e) administrativement à l'Université pour l'année en cours et posséder sa carte d'étudiant de Paris-Diderot (visée par le centre de médecine préventive).
- être inscrit(e) pédagogiquement aux enseignements concernés au début de l'année ou du semestre universitaire,

Deuxième session Pour pouvoir se présenter à la 2ème session, il est indispensable d'avoir été inscrit(e) à la première session (janvier ou mai).

Convocation aux examens

- Il n'y a pas de convocation individuelle.
- Les dates d'examen ne sont pas données au téléphone.
- Les étudiant(e)s doivent consulter
  - le tableau d'affichage
  - ou le site de l'UFR :
    http ://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/index

Enseignements extérieurs à l'UFR On attire l'attention des étudiant(e)s inscrit(e)s à des UE dans un autre cycle, une autre UFR ou dans une autre université sur le fait qu'il est très difficile, pour des raisons matérielles, de tenir compte d'éventuels chevauchements dans les calendriers des examens.

Contrôle continu

Les textes officiels actuellement en application imposent un contrôle des connaissances associant contrôle continu et examens terminaux (chacun de ces modes de contrôle entrant pour au moins 20 % dans la note finale).

Règlement du jury

Conformément aux règlements nationaux, le Président de l'Université, sur proposition du Directeur de l'UFR de mathématiques, désigne par arrêtés les jurys de diplômes (Licences, Master), et jurys auxiliaires pour chaque enseignement.
Chaque jury de diplôme (Licence, Master) délibère ; il établit la liste des étudiant(e)s reçu(e)s, qui est transmise au service des attestations de diplômes.
Un(e) étudiant(e) ne peut être déclaré(e) reçu(e) au diplôme si il (elle) ne peut pas justifier des titres donnant accès au master (suivant les cas une Licence ou une décision de dispense)
Un(e) étudiant(e) est déclaré(e) reçu(e) au diplôme si il (elle) a validé toutes les UE correspondant au diplôme, ou par compensation suivant les règles suivantes :

Règles de compensation Chaque semestre est validé lorsque l'étudiant a validé des unités d'enseignements (UE) correspondant à au moins 80% des crédits requis et en outre lorsque la moyenne pondérée de l'ensemble des UE requises est supérieure ou égale à 10/20, **et chaque note doit être supérieure ou égale à 7/20**. La même règle s'applique pour la validation de l'année.

1 Le parcours Mathématiques Fondamentales

Ce parcours laisse ouvertes de larges possibilités. Il est d'abord conçu pour des étudiant(e)s qui envisagent un M2 de Mathématiques fondamentales ou la préparation à l'Agrégation. Mais choisir ce parcours ne ferme pas la voie au M2 de Modélisation Aléatoire ou à M2 de Logique Mathématique. Il permet éventuellement aussi de préparer un dossier en vue de l'intégration dans une école d'ingénieur.

Enseignements proposés

S1

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Algèbre	12	4	6	0
Functional Analysis	12	4	6	0
Géométrie Différentielle	6	2	3	0
Spectral Theory	6	2	3	0
Probabilités	12	4	6	0
Logique du 1er ordre	6	2	3	0
Logique et Complexité	6	2	3	0
Analyse Réelle	6	2	3	0
Algorithmique et Projet Informatique	6	2	0	3
Anglais (obligatoire)	6	0	4	0

S2

U.E.	Crédits	Volume horaire		
		CM	TD	TP
Arithmétique	12	4	6	0
Topologie Algébrique	12	4	6	0
Géométrie Différentielle	6	2	3	0
Incomplétude et Indécidabilité	6	2	3	0
Théorie des Ensembles	6	2	3	0
équations aux Dérivées Partielles	6	2	3	0
Base des Méthodes Numériques	6	2	3	0
Probability and stochastic processes	12	4	6	0
Statistique Fondamentale	6	2	3	0
Statistique bayésienne et tests	6	2	3	0
Mathématiques Financières	6	2	3	0
Projets : Calcul Scientifique et Statistique	6	2	0	3

2 Le parcours Modélisation aléatoire

Le parcours Modélisation aléatoire se propose de donner à l'étudiant une solide culture mathématique en mathématique appliquée avec une coloration particulière en probabilités et statistiques, bien que les enseignements d'analyse, analyse numérique et informatique aient aussi une part importante.
Ce parcours laisse ouvertes de larges possibilités. Il est d'abord conçu pour des étudiant(e)s qui envisagent un M2 de modélisation aléatoire/finance mais il ne ferme pas les autres portes.
Par rapport au parcours de mathématiques fondamentales, les étudiant(e)s sont relativement plus dirigé(e)s : il y a plus d'enseignements imposés. En particulier, le premier semestre ne laisse pas de choix aux étudiant(e)s, avec des enseignements de probabilités, d'analyse et d'informatique obligatoires.

Enseignements proposés

S1

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**			**obligatoire**
		CM	**TD**	**TP**	
Probabilités	12	4	6	0	oui
Analyse Réelle	6	2	3	0	oui
Algorithmique et Projet Informatique	6	2	0	3	oui
Anglais	6	0	4	0	oui

S2

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**			**obligatoire**
		CM	**TD**	**TP**	
équations aux Dérivées Partielles	6	2	3	0	non
Base des Méthodes Numériques	6	2	3	0	oui
Probability and stochastic processes	12	4	6	0	non
Statistique Fondamentale	6	2	3	0	oui
Statistique bayésienne et tests	6	2	3	0	non
Mathématiques Financières	6	2	3	0	non
Projets : Calcul Scientifique et Statistique	6	2	0	3	oui

3 Le parcours Logique Mathématique et Fondements de l'informatique

Le Master I Logique Mathématique et Fondements de l'informatique permet de renforcer les connaissances en mathématiques fondamentales acquises en Licence et offre un début d'orientation vers la logique mathématique et ses applications. Ce parcours est d'abord conçu pour des étudiant(e)s qui envisagent un M2 LMFI mais il permet encore la préparation à l'Agrégation.

Enseignements proposés

S1

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Algèbre	12	4	6	0
Functional Analysis	12	4	6	0
Géométrie Différentielle	6	2	3	0
Spectral Theory	6	2	3	0
Probabilités	12	4	6	0
Logique du 1er ordre	6	2	3	0
Logique et Complexité	6	2	3	0
Analyse Réelle	6	2	3	0
Algorithmique et Projet Informatique	6	2	0	3
Anglais (obligatoire)	6	0	4	0

S2

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Arithmétique	12	4	6	0
Topologie Algébrique	12	4	6	0
Incomplétude et Indécidabilité	6	2	3	0
Théorie des Ensembles	6	2	3	0
équations aux Dérivées Partielles	6	2	3	0
Base des Méthodes Numériques	6	2	3	0
Probability and stochastic processes	12	4	6	0
Statistique Fondamentale	6	2	3	0

Description des enseignements

Analyse Fonctionnelle L'analyse fonctionnelle célèbre les noces de l'algèbre lineaire et de la topologie. L'attention se porte sur des espaces vectoriels de dimension infinie, souvent munis d'une norme qui en fait des espaces métriques complets, par exemple l'espace des fonctions continues de [0, 1] sur R. Une différence, et de taille, entre les dimensions finie et infinie, est l'absence de compacite de la boule unité dans le second cas. Cependant, les applications classiques au calcul des variations, et partant aux équations aux dérivées partielles, sont fondées sur des ersatz de compacite forte. Ces résultats sont obtenus dans des espaces de Lebesgue ou de Sobolev, dont le caractère complet repose sur l'existence de la mesure de Lebesgue.

1. Espaces vectoriels topologiques localement convexes ; applications linéaires continues ; theorème de Hahn-Banach ; espaces de Banach ; espace dual.
2. Theorème de Baire et ses conséquences.
3. Espaces de Lebesgue ; theorème de Riesz-Fischer ; dualité entre Lp et Lq .
4. Compacité : theoreme de Riesz ; topologie préfaible et theorème de Banach-Alaoglu ; theorème d'Ascoli.
5. Dérivée faible ; espace de Sobolev ; inégalité de Poincaré ; theorème de Rellich.
6. Introduction au calcul des variations : méthode directe ; problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques existence et régularité.
7. Opérateurs bornes d'un espace de Hilbert, éléments de la théorie spectrale.

Algèbre Le cours comporte deux parties. La première partie (1-5) est consacrée à la théorie de Galois et ses applications. On intègre les compléments utiles sur les anneaux, anneaux de polynômes et groupes. La seconde partie (6-8) aborde la théorie des modules. On développe les notions de bases utiles pour un cours plus avancé utilisant l'algèbre commutative, les résultats de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux avec les applications correspondantes, et le calcul des idéaux dans les anneaux de polynômes.

1. Anneaux commutatifs, anneaux de polynômes : rappels et compléments.
2. Extensions de corps : généralités ; algébricité ; corps de décomposition, clôture algébrique ; corps finis, corps cyclotomiques.
3. Groupes : action de groupe, théorèmes de Sylow, groupes résolubles.
4. Théorie de Galois : groupe de Galois ; extensions normales, extensions séparables, correspondance de Galois.
5. Applications de la théorie de Galois : résolubilité par radicaux, constructibilité.
6. Introduction à la théorie des modules : généralités, exemples, éléments de torsion, modules libres, produit tensoriel.
7. Modules sur les anneaux principaux : théorèmes de structure ; groupes abéliens de type fini, réseaux ; réduction des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie.
8. Modules et anneaux noethériens ; cas des polynômes ; bases de Gröbner.

Probabilités

Sommaire du cours

Probabilités discrètes : Axiomes des probabilités, conditionnement, indépendance, variables aléatoires discrètes (loi, espérance, variance), promenade aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Espaces de probabilités : Rappel de théorie de la mesure, variable aléatoire, loi, espérance des v.a. réelles (rappel des théorèmes limites d'intégration), probabilités produits.

Variables aléatoires réelles : Fonction de répartition, médiane, lois, densités, simulation par inversion de la fonction de répartition.

Moments et transformations intégrales de v. a. réelles : Inégalités de Markov, Tchebichev, Schwarz, Hölder, Jensen. Fonctions génératrice d'une v.a. entière, fonction caractéristique d'une v.a. réelle.

Vecteurs aléatoires I : lois, densités, covariance, fonction caractéristique, formule du changement de variable différentiable et densités.

Somme de v.a. réelles indépendantes : Indépendance (de tribus, de v.a.), loi de la somme : convolée, fonction caractéristique, somme d'un nombre aléatoire de v.a. indépendantes (branchement, percolation sur l'arbre binaire).

Lois des grands nombres : convergence en probabilité, convergence presque sûre. Loi faible/forte des grands nombres. Loi 0-1 de Kolmogorov.

Convergence en loi et théorème de la limite centrale : convergence étroite des probabilités, théorème du porte-manteau. Sur $\mathbb{R}^d$, convergence des fonctions caractéristiques, théorème fondamental de la statistique, théorème de la limite centrale.

Vecteurs aléatoires II : matrice de covariance, vecteurs aléatoires gaussiens, théorème de la limite centrale vectoriel.

Méthodes hilbertiennes : régression linéaire, espérance conditionnelle et projection orthogonale dans L^2, extension à L^1.

Marche aléatoire : marche aléatoire et potentiel.

Analyse réelle

- Espaces métriques, généralités : Définition des espaces métriques et des espaces normés. Espaces normés de suites de nombres complexes. Inégalités de Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski. Espace normé des fonctions continues sur un intervalle. Espace normé des fonctions bornées sur un ensemble non vide. Rappels de topologie : ouverts, fermés, intérieur, adhérence, exemples. Espaces métriques complets.
- Espaces de Banach : Espaces de Banach. Exemples classiques d'espace de Banach : espace de suites, fonctions continues sur un intervalle fermé et fonctions bornées. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle munis de la norme L^p n'est pas complet. Complétion d'un espace métrique. Théorème d'existence des complétions. Rappel sur les ensembles dénombrables. Séparabilité. Exemples : ℓ^p et ℓ^∞. Opérateurs linéaires dans les espaces normés. Fonctionnelles linéaires continues. Espace dual d'un espace vectoriel normé.
- Compacité : Compacité dans les espaces topologiques : définition. Compacité séquentielle. Les ensembles fermés et bornés dans les espaces métriques ne sont en général pas compacts : exemples. Précompacité : motivation de la définition. Théorème d'équivalence des trois définitions dans les espaces métriques complets. Propriétés des ensembles compacts. Cube de Hilbert. Théorème de Riesz. Compacité et continuité. Théorème d'Ascoli-Arzela. Applications et exemples.
- Espace L^p : Intégration d'une fonction mesurable sur un espace mesuré. Théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée. Ensembles des fonctions sommables S^p. Semi-norme. Classes d'équivalence, espaces normés L^p. Complétude de ces espaces. Convolution. Régularisation. Approximation de l'unité.
- Espace de Hilbert : Espaces hermitiens. Propriété élémentaires : inégalité de Bessel, Cauchy-Schwarz. Espaces de Hilbert. Théorème de projection sur un convexe fermé. Base hilbertienne. Espaces de Hilbert séparables. Théorème d'existence d'une base hilbertienne dans les espaces séparables. Formule de décomposition dans une base hilbertienne. Théorème de Plancherel et identité de Parseval. Séries de Fourier. Complétude du système trigonométrique dans $L^2(T)$.
- Analyse de Fourier : Transformation de Fourier sur $L^2(T)$. Isomorphisme de $L^2(T)$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Extension à $L^1(T)$. Théorèmes de convergence usuels (Dirichlet, Féjer) Isomorphisme de l'espace des fonctions infiniment régulières sur le tore sur l'espace des suites à décroissance rapide. Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$: Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. La classe S de L. Schwartz. Prolongement à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et théorème de Plancherel.

Références

- Walter Rudin : Analyse réelle et complexe Dunod
- Lieb et Loss : Analysis American Mathematical Society.

Géométrie Différentielle

Sommaire du cours Plan du cours prévu :

- Rappels sur les fonctions différentiables de plusieurs variables. Théorème des fonctions implicites, sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.
- Variétés différentielles, exemples. Grassmaniennes. Espaces tangents, champs de vecteurs.
- Groupes de Lie, exemples. Sous-groupes à un paramètre. Application exponentielle.
- Fibrés vectoriels. Tenseurs.
- Formes différentielles. Formule de Stokes.
- Crochets de Lie. Algèbres de Lie.
- Fibrations principales. Fibrés associés. Connexions et courbures.
- Métriques riemanniennes. Géodésiques.
- Si le temps le permet : présentation des champs de la gravitation et du modèle standard des particules.

Références

F. PHAM, Géométrie et calcul différentiel sur les variétés, InterEditions, 1992.

M.CHAPERON, Calcul différentiel et calcul intégral. Dunod, 2003

Théorie Spectrale

Sommaire du cours

Spectre d'un opérateur, résolvante

Théorie spectrale des opérateurs compacts. Alternative de Fredholm. Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints bornés.

Opérateurs non bornés. Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints non bornés.

Références Les références ci-après traitent des questions qui feront l'objet du cours :

M. Reed, B. Simon, Methods of modern Mathematical Physics, 1, Academic Press 1978.

W. Rudin, Functional Analysis, Mac Graw Hill 1973.

H. Brezis, Eléments d'analyse fonctionnelle, Masson 1983.

Logique du premier ordre Ce cours expose les notions de base de la logique mathématique. L'étude du langage et du raisonnement mathématiques constitue l'objectif premier de cette discipline. Elle est utile à tout étudiant en mathématiques, en particulier à ceux qui s'intéressent également à l'informatique.

Sommaire du cours

Notions élémentaires de cardinalité : ensembles finis, ensembles dénombrables, puissance du continu. Théorème de Cantor-Bernstein.

Calcul propositionnel. Mise sous forme normale.

Langages du premier ordre. Formules ; structures ; satisfaction ; théories ; modèles.

Syntaxe et sémantique. Théorème de compacité.

Systèmes de déduction. Théorème de complétude (langages dénombrables).

Isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorème de Löwenheim-Skolem.

Théories complètes. Critère de Vaught.

Références

J.L. Krivine, Logique et Théories Axiomatiques (LTA), cours polycopiés, Université de Paris 7.

R. Cori et D. Lascar, Logique Mathématique, cours et exercices, en 2 tomes, Dunod, 2003.

Logique et Complexité L'objectif de ce cours est d'abord de présenter les notions logiques de décidabilité et d'indécidabilité. On définit ensuite la notion de réduction entre problèmes. On présente enfin la notion de complexité qui prend en compte les ressources (temps de calcul, espace mémoire) nécessaires à la résolution d'un problème sur machine.

Sommaire du cours Le cours comporte deux parties : calculabilité et complexité. La calculabilité s'intéresse à définir et étudier ce qui est calculable automatiquement (par un algorithme). On définit différentes notions de ce qu'est une fonction calculable et on démontre leur équivalence. On présente ensuite des exemples fondamentaux de problèmes non calculables. La seconde partie traite de la complexité. On s'intéresse ici à ce qui est calculable efficacement. Le but de la complexité est de déterminer les ressources de calcul nécessaires, telle que le temps ou l'espace mémoire, à la résolution d'un problème algorithmique.

Sommaire du cours

I. Calculabilité - Fonctions récursives primitives Les fonctions récursives primitives sont le plus petit ensemble de fonctions contenant les fonctions nulles, les projections et la fonction successeur et clos par composition et récurrence. Exemples de base : addition, multiplication, puissance, signe, ... Ensembles récursifs primitifs, propriétés de clôture :union, intersection, complémentaire, quantification bornée, ... Codage des suites. La fonction d'Ackermann : exemple de fonction calculable intuitivement mais non récursive primitive. - Fonctions récursives et machines de Turing Schéma de minimisation (non borné). Fonctions récursives. Machines de Turing. Les fonctions récursives sont exactement les fonctions calculables par machine de Turing. Machine de Turing universelle. La simulation d'une machine de Turing jusqu'à un temps donné est récursive primitif. Application à la définition par cas dans le cas récursif. - Ensembles récursivement énumérables Les ensembles récursivement énumérables sont les domaines de fonctions récursives. Le problème de décider l'arrêt d'une machine de Turing est indécidable. Théorème smn et théorème de Rice. Théorème du point fixe (Kleene).

II. Complexité - Complexité en temps Retour sur les machines de Turing. Machine universelle. Théorème de diagonalisation en temps. - Temps non-déterministe Machines de Turing non déterministes. Classe NP. Réduction et complétude. Théorème de Cook (SAT est NP-complet). Exemples de problèmes NP-complets. Technique de recherche préfixe. Rembourrage (padding). - Classes de complexité en espace Classes en espace déterministe et non-déterministe. Théorème de hiérarchie en espace. Théorème de Savitch. QBF (Quantified Boolean Formula) est PSPACE-complet. Le problème

PATH est NL-complet.

Références

R. Cori et D. Lascar, Logique Mathématique, cours et exercices, tome 2, Dunod, 2003.

S. Arora and B. Barak. Computational Complexity : A Modern Approach. Cambridge University Press, 2009.

Algorithmique et Projet Informatique
Initiation à l'algorithmique et à la programmation en C.
Le langage C sera introduit sans prérequis : instructions de programmation structurée, pr'ec'edence des op'erateurs, types de variables, passage de param'etres, tableaux, structures, pointeurs, allocation dynamique, fichiers, fonctions.
Algorithmes étudiés : tris, opérations sur listes chainées, piles, tas, graphes.
Notion de récursivité, et de programmation dynamique.
Modalités d'évaluation : Pour chaque session : 1 examen écrit coefficient 2/3 et 1 épreuve machine coefficient 1/3.

Arithmétique

1. Structures finies
   - Les corps finis : construction, unicité, substitution de Frobenius, théorie de Galois, cyclicité du groupe multiplicatif, Théorème de Chevalley-Warning.
   - L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
   - Les nombres p-adiques : Construction, structure d'anneau, structure multiplicative des entiers p-adiques, valuation p-adique.
   - Le théorème d'Ostrowski (classification des topologies sur les nombres rationnels).
   - Les caractères des groupes finis (rappel du théorème de structure des groupes abéliens finis), le groupe dual d'un groupe abélien fini.
   - Les sommes de Gauss.
   - La fonction Gamma : caractérisation comme fonction d'une variable complexe, formules des compléments, formule de Legendre-Gauss, formule de Stirling, l'inverse de la fonction Gamma est entière.
2. Étude de l'ensemble des nombres premiers
   - La fonction zêta de Riemann, vue comme série de Dirichlet et comme produit eulérien.
   - Les polynômes de Bernoulli. Valeurs aux entiers de la fonction zêta.
   - Prolongement analytique de la fonction zêta. équation fonctionnelle de la fonction zêta.
   - Le théorème des nombres premiers (preuve de Newman).
   - étude des zéros de zêta.
3. Cyclotomie
   - Le polynôme cyclotomiques. Irréductibilité de ce polynôme.
   - Pour n entier fixé, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n.
   - Application : tout groupe abélien fini est groupe de Galois d'une extension finie de $\mathbb{Q}$.
   - L'anneau des entiers cyclotomiques.étude locale des corps cyclotomiques : sous-groupe de décomposition, d'inertie en un nombre premier.
   - étude des sous-corps des corps cyclotomiques. Toute extension quadratique de $\mathbb{Q}$ est contenue dans une extension cyclotomique.
   - La loi de réciprocité quadratique.
   - Les fonctions L de Dirichlet, étude analytique. Le théorème de la progression arithmétique
4. Équations diophantiennes
   - étude de l'équation de Fermat pour les exposants 3 et 4. Méthode de Kummer pour aborder l'équation de Fermat.
   - Méthode locales : le lemme de Hensel.
   - Le théorème de Legendre sur les formes quadratiques en trois variables. Le principe de Hasse.
   - Le théorème de Mason et la conjecture *abc*. Applications.

Topologie Algébrique Les principaux objectifs du cours de topologie algébrique sont l'étude du groupe fondamental et des revêtements, l'algèbre homologique, une théorie d'homologie/cohomologie (le choix de cette théorie n'est pas encore arrêté), et l'application de ces concepts aux variétés topologique/différentielles, dont la dualité de Poincaré, et quelques unes de ses applications (en plus des théorèmes classiques de Brouwer, Borsuk-Ulam, etc). Comme les années précédentes, la théorie des catégories occupera une place importante dans le cours.

Le programme précis de ce cours sera disponible au cours de l'automne 2013 sur la page web :
http ://www.logique.jussieu.fr/ alp
sur laquelle on peut d'ores et déjà trouver les documents associés aux cours de topologie algébrique des années précédentes :
http ://www.logique.jussieu.fr/ alp/cours-2012.pdf
http ://www.logique.jussieu.fr/ alp/complements
http ://www.logique.jussieu.fr/ alp/problemes-topologie-algebrique.pdf

Les changements entre le cours 2013-2014 et les cours précédents porteront sur environ un tiers du programme.

Les prérequis sont les suivants : - topologie générale du L3 - calcul différentiel du L3 - algèbre linéaire L1 et L2

Indécidabilité et incomplétude.

Compétences visées Comprendre la portée des résultats d'indécidabilité et d'incomplétude. Maîtriser les méthodes élémentaires de preuve de décidabilité.

Sommaire du cours

Rappel sur les fonctions récursives. Thèse de Church.

Ensembles récursifs et ensembles récursivement énumérables.

Problèmes décidables. Problèmes indécidables.

Prouvabilité dans l'arithmétique de Peano. Fonctions représentables.

Indécidabilité de l'arithmétique de Peano. 1er théorème d'incomplétude de Gödel.

Méthode d'élimination des quantificateurs. Exemples de théories décidables (arithmétique de Presburger,...).

Autres méthodes de preuve de décidabilité (exemples : jeux,...).

Théorie des ensembles

Compétences visées Maîtriser l'axiomatique de base en théorie des ensembles et son application aux mathématiques.

Sommaire du cours

Le système axiomatique ZFC.

Induction et récursion transfinies.

Axiome du choix, lemme de Zorn, principe du bon ordre.

Ordinaux et cardinaux, arithmétique.

Filtres et ultrafiltres.

Ensembles stationnaires, lemme de Fodor.

Equations aux dérivées partielles

1. Quelques exemples importants. Solutions fortes.
   (a) Quelques notions préliminaires de géométrie différentielle. Exemples d'opérateurs aux dérivées partielles.
   (b) équation de Poisson. Solution fondamentale. Formules de moyennes. Problèmes aux limites. Solutions fortes. Principes du maximum. Lemme de Harnack. Estimations locales des dérivées partielles des solutions. Théorème de Liouville. Unicité pour le problème de Dirichlet.
   (c) équation de la chaleur. Solution fondamentale. Solution du problème de Cauchy. Caractère régularisant. Problèmes aux limites. Solutions fortes. Formules de moyennes. Principes du maximum. énergie.
   (d) équations des ondes. Problème de Cauchy. Solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. Propagation à vitesse finies. énergie.
2. Espaces de Sobolev
   (a) Dérivées au sens faible. Propriétés élémentaires. Définition des espaces de Sobolev.
   (b) Théorèmes de prolongement.
   (c) Théorème de densité.
   (d) Injections de Sobolev.
   (e) Inégalités de Poincaré, Inégalité de Poincaré Wiertinger, Théorème de compacité de Rellich.
   (f) Théorèmes de traces
3. Solutions faibles de problèmes aux limites avec des équation elliptiques
   (a) Formules d'intégration par parties
   (b) Théorème de Lax-Milgram.
   (c) Solutions faibles du problème de Dirichlet : existence et unicité.
   (d) Régularité des solutions faibles : quotients différentiels, régularité locale, régulatité jusqu'au bord.
   (e) Solutions faibles du problème de Neumann
   (f) Principe du maximum faible
   (g) Problème aux valeurs propres pour le problème de Dirichlet. Théorie spectrale.
4. Solutions faibles de problèmes aux limites avec des équation paraboliques
   (a) Existence pour le problème de Dirichlet : méthode de Galerkin

Références

– L. Evans : Partial differential equations Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society
– H. Brézis : Analyse fonctionnelle et applications.

Bases des méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles

1. Solutions faibles des problèmes aux limites pour les équations elliptiques en dimension un
   (a) Exemples
   (b) Dérivation au sens faible. L'espace H^1. Propriétés : densité des fonctions régulières, continuité, régularité Hölder, compacité.
   (c) problèmes aux limites : solutions faibles. Théorème de Lax-Milgram. Existence et unicité. Régularité.
2. Méthodes des éléments finis pour les équations elliptiques en dimension un
   (a) Présentation de la méthode.
   (b) Mise en oeuvre de la méthode. Programmation en scilab.
   (c) Convergence et estimations d'erreur dans H^1.
   (d) Estimations d'erreur dans L^2.
3. Méthodes des éléments finis pour les équations elliptiques en dimension arbitraire
   (a) Quelques notions préliminaires de géométries différentielle. Exemples d'opérateurs aux dérivées partielles.
   (b) Présentation axionmatique de la méthode des éléments finis.
   (c) Mise en oeuvre de la méthode. Programmation en Freefem++
   (d) Convergence et estimations d'erreur dans H^1.
   (e) Estimations d'erreur dans L^2.
4. Méthode des différences finies pour des problèmes elliptiques et paraboliques
   (a) Notion de consistance, stabilité, convergence
   (b) étude du θ-schéma. Condition CFL.
   (c) Programmation en Scilab.
   (d) Principe du maximum. Décentrage.

Références

- Raviart, Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
- F Hecht et O. Pironneau http ://www.freefem.org/
- Quarteroni A., Sacco R., and Saleri F. Numerical mathematics. Springer, 2000.

Probability and stochastic Processes Un des buts de cours est de fournir une bonne préparation à l'agrégation, option probabilités, ou à tout 2ème année de master à orientation probabiliste.

Sommaire du cours

Convergence en loi et théorème de la limite centrale

Espérance conditionnelle

Martingales et applications

Chaînes de Markov et applications

Références

D.Williams, Probability with martingales, Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

G.R. Grimmett , D.R. Stirzaker, Probability and random processes, second edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992 .

M. Benaïm , N. El Karoui, Promenade aléatoire, Editions de l'Ecole Polytechnique (Palaiseau), 2004.

Statistique Fondamentale Le but de cet enseignement est de développer sur un plan théorique les principaux outils de probabilités numériques et de statistique pour la modélisation. En particulier, cet enseignement couvrira des parties du programme de l'agrégation (partie modélisation, option Probabilités et Statistiques). Aucune connaissance préalable en programmation n'est requise.

Sommaire du cours

Notion de modélisation, d'erreur expérimentale, modèle statistique (modèle binomial, de Poisson, exponentiel, normal). Introduction à l'estimation statistique, à la théorie des tests, notion d'intervalle de confiance. sur machine simulation d'une variable aléatoire, calcul approché d'intégrales par méthodes de Monte Carlo. Validation des résultats numériques, construction d'intervalles de confiance sur données numériques, comparaison de populations, validation d'hypothèses.

Vecteurs gaussiens, Théorème de Cochran. Modèle linéaire gaussien. Estimation par les moindres carrés. Test de Fisher, de Student. Théorème de la limite centrale multidimensionnel. Test du χ^2. Méthodes du modèle linéaire. Analyse de la variance, régression.

échantillonnage, fonction de répartition empirique, théorème de Glivenko-Cantelli. Test de Kolmogorov-Smirnov. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états au plus dénombrable. Chaînes irréductibles. Théorie asymptotique, probabilité Invariante, convergence en loi.

Statistique bayésienne et tests L'objectif général de ce cours est deprésenter les thèmes fondamentaux qui ne sont pas introduits en Statistique fondamentale :

- l'inférence bayésienne
- les tests
- quelques notions sur la sélection/vérificationdemodèles

Sommaire du cours

Inférence bayésienne (avec un peu de théorie de la décision)

- Lois a priori, risque bayésien, estimateur bayésien, admissibilité
- Risque maximin-minimax
- Introduction aux techniques de minoration du risque. Inégalités de Van-Trees
- Bayésien empirique : motivations

Tests (en fonction de ce qui aura été vu au cours de Statistique fondamentale)

- Tests binaires Lemme de Neyman et Pearson
- Dualité tests/régions de confiance
- Tests de type chi-deux
- Tests de Fisher,sélection de variables dans les modèles linéaires
- ANOVA
- Puissance,analyseasymptotique

Tests non-paramétriques

- Signe,rangs.
- Test de Shapiro-Wilks, application à la vérification de modèle
- Adéquation(Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling,Cramer-von-Mises)

Références

Davison : Stochastic models. Cambridge University Press

Wasserman : All of statistics. Springer Verlag

Breiman : Statistics with a view towards applications.

Venables and Ripley :MASS Modern applied Statistics with S-plus (and R)

Van der Vaart : Asymptotic Statistics. Cambridge

Mathématiques financières Dans ce cours, nous introduisons les notions de base (taux d'intérêt...) indispensables à la compréhension des modèles en finance. Nous présentons ensuite les modèles de marchés financiers en temps discret, qui utilisent la théorie des martingales ainsi que l'arrêt optimal en temps discret. Nous donnons ci-dessous le plan du cours.

1. Les taux d'intérêt : taux simples, taux composés, actualisation.
2. Produits financiers de base : emprunts indivis, méthodes de remboursement (par annuités constantes ...), emprunts obligataires, taux actuariel d'une obligation, courbe des taux par terme.
3. Présentation de deux produits dérivés : les contrats à terme et les swaps de taux
4. Présentation d'un autre type de produits dérivés : les options.
   Exemples : option d'achat, option de vente.
   Modèle à une période : actif sans risque, actif risqué, stratégies de portefeuille, opportunité d'arbitrage, probabilité risque-neutre, prix d'une option européenne, stratégie de couverture.
   Modèle à plusieurs périodes de Cox-Ross-Rubinstein : prix des options européennes et des options américaines.
5. Martingales, surmartingales à temps discret, temps d'arrêt, martingales arrêtées, décomposition de Doob des surmartingales.
   Arrêt optimal, enveloppe de Snell.
6. Modèles discrets à plusieurs périodes dans le cas général : stratégies de portefeuille, opportunité d'arbitrage, probabilités martingale, caractérisation d'un marché sans arbitrage, d'un marché complet. Evaluation des options européennes et des options américaines.

   Référence : Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance, Bernard Lapeyre et Damien Lamberton, Editeur : Ellipses.

Projets : Calcul Scientifique et statistique ou STAGE Il s'agit d'un projet individuel ou à deux proposé, encadré par des enseignants du Master. Le projet consiste à mettre en oeuvre des méthodes numériques variées : méthode de Monte-Carlo pour variables indépendantes et chaînes de Markov, réduction de variance, transformées de Fourier rapide, classification, méthodes déterministes d'intégration approchée, schémas numériques pour les équations différentielles, schémas numériques pour les EDP ... L'étudiant rédigera un rapport. Le projet donnera lieu à une soutenance.
L'étudiant peut remplacer ce projet par un stage qui se déroulera soit dans un département recherche et développement d'une grande entreprise du secteur industriel ou tertiaire, soit dans une société de service. Le sujet devra être approuvé par le maitre de stage, le responsable du Master et les instances de l'université. La demande doit être faite au moins deux mois au préalable. L'étudiant rédigera un rapport. Consulter le site de l'UFR pour les démarches nécessaires dans ce cas.